

Acustica

Lezione 3

La sinusoide e l'analisi di Fourier

Luigi Manfrin

Dal suono nell'esperienza al suono in laboratorio

Finora abbiamo considerato il suono come si manifesta nell'esperienza, nella complessità delle sue variazioni. Ora entriamo in un altro ambito: il *laboratorio*.

Qui il suono viene separato dal contesto di esperienza e osservato in condizioni controllate. Questo comporta una semplificazione: non consideriamo più il fenomeno nella sua completezza, ma ne isoliamo alcuni aspetti per poterli analizzare. In questo modo perdiamo parte della ricchezza con cui il suono si presenta, ma riusciamo a comprenderne meglio alcune proprietà fondamentali.

La **sinusoide** è il caso più semplice possibile: *un'onda perfettamente regolare*. Per questo diventa un modello di riferimento, cioè quello che possiamo chiamare un paradigma di ricerca.

Tuttavia, i suoni effettivi - musicali e non - sono molto più complessi.

Nonostante l'artificio e la semplificazione, lo studio in laboratorio permette di comprendere molti aspetti fondamentali del funzionamento del suono cosiddetto "naturale". Questo significa però che i modelli di laboratorio sono sempre approssimazioni e possono essere messi in discussione quando li confrontiamo con la realtà.

In questo senso, la sinusoide può essere intesa come un *oggetto paradigmatico* (Kuhn), mentre la complessità dei suoni reali mantiene aperta la possibilità di mettere alla prova e falsificare i modelli (Popper).

La sinusoide: oggetto fisico e modello matematico

L'operazionismo fenomenologico di Michel Bitbol (1954).

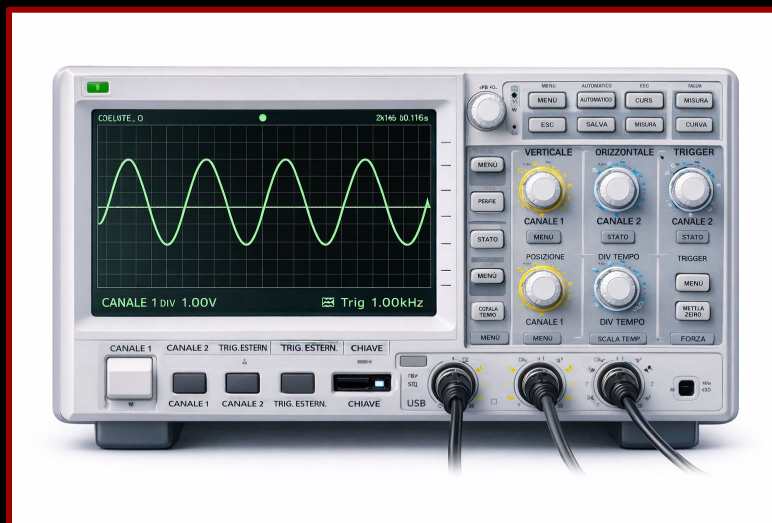
- *La mécanique quantique. Une introduction philosophique*, Flammarion, 1996. -

1. L'idea di Michel Bitbol → In scienza non studiamo “cose in sé”, studiamo ciò che otteniamo tramite operazioni controllate: *un oggetto scientifico* = operazioni + risultati.
2. La sinusoide come oggetto fisico → prodotta con strumenti (generatore, altoparlante, microfono) e viene osservata come forma d'onda regolare: è un risultato sperimentale.
3. La sinusoide come modello matematico → *una funzione trigonometrica periodica*, usata per analizzare e prevedere i fenomeni sonori → È uno strumento teorico.
4. Non esiste una sinusoide “in sé” → Esiste solo attraverso le *operazioni* di produzione, di misura e di modellizzazione. La fisica acustica descrive le condizioni di osservazione e misura dei fenomeni, non una realtà “in sé”.

La sinusoide è un oggetto costruito, punto d'incontro tra la pratica sperimentale e la formalizzazione matematica. La sinusoide non è una cosa che esiste da sola, è ciò che otteniamo quando produciamo, misuriamo e modellizziamo il suono.

L'Oscilloscopio

Un oscilloscopio → lo strumento che permette di vedere ($\neq$ produrre) i segnali acustici sotto forma di onde sullo schermo. Sull'asse orizzontale c'è il tempo, su quello verticale la pressione (o ampiezza): si può osservare le oscillazioni del suono, cioè le sue compressioni e rarefazioni.



- Schermo (display) → mostra l'onda sonora nel tempo.
- Asse orizzontale (DIV TEMPO) → regola la scala del tempo (quanto “veloce” scorre l'onda).
- Asse verticale (CANALE 1 / VOLT/DIV) → regola l'ampiezza del segnale (intensità/pressione).
- POSIZIONE → sposta l'onda sullo schermo (su/giù o destra/sinistra).
- TRIGGER → stabilizza l'immagine dell'onda (la rende ferma e leggibile).
- CANALE 1 / CANALE 2 → ingressi del segnale (es. microfono).
- MENU / MISURA → funzioni per analizzare il segnale (frequenza, ampiezza, ecc.).

Dal movimento fisico dell'aria al segnale elettrico

Il microfono → trasforma le variazioni di pressione dell'aria in un segnale elettrico che ne conserva l'andamento nel tempo.

Trasduzione → trasformazione di un tipo di energia o segnale in un altro, mantenendo l'informazione. Es., il microfono → *trasduzione* del segnale acustico in elettrico.



Dal segnale alla visualizzazione: oscilloscopio e propagazione elettrica

- Fine XIX secolo → i primi dispositivi per visualizzare segnali elettrici, legati agli studi sulle onde elettriche.
- 1897 → il fisico tedesco **Karl Ferdinand Braun** (1850-1919) inventa il tubo a raggi catodici: permette per la prima volta di visualizzare un segnale come traccia luminosa su uno schermo → l'antenato dell'oscilloscopio.
- Anni 1920–30 → compaiono i primi oscilloscopi moderni usati in laboratorio per analizzare segnali elettrici e onde sonore.

Nelle onde sonore e nei segnali elettrici, le particelle (o gli elettroni) oscillano localmente attorno all'equilibrio senza migrare lungo il mezzo: ciò che si propaga è la perturbazione (pressione o campo elettrico), non la materia. Il *cavo del microfono* funge da mezzo conduttore che trasmette questa variazione di campo elettrico (segnale) dallo strumento di trasduzione al dispositivo di visualizzazione o elaborazione.

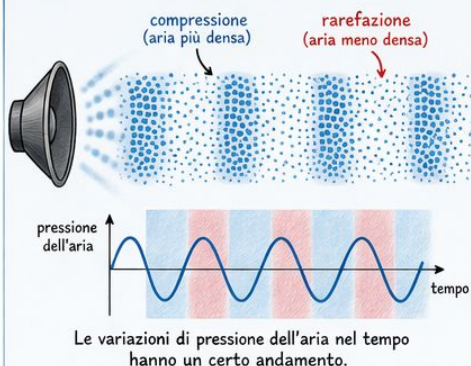
L'oscilloscopio non mostra il movimento reale delle particelle o degli elettroni. Mostra invece una linea che rappresenta come il segnale cambia nel tempo. Il microfono trasforma il suono in un segnale elettrico, e il cavo lo trasporta fino all'oscilloscopio. Qui il segnale controlla il disegno, facendone muovere la traccia sullo schermo nel tempo: *quello che vediamo è quindi una rappresentazione del suono, non il movimento fisico della materia.*

DAL SUONO ALL'IMMAGINE: MICROFONO E OSCILLOSCOPIO

Il microfono trasforma il suono (variazioni dell'aria) in un segnale elettrico che segue lo stesso andamento.

1. IL SUONO: VARIAZIONI DELL'ARIA

Il suono è un'onda di compressioni e rarefazioni che fa muovere le particelle dell'aria avanti e indietro.



2. IL MICROFONO: TRASDUZIONE

Le variazioni di pressione dell'aria fanno vibrare una membrana sottile. Questa vibrazione viene trasformata in un segnale elettrico.



3. L'OSCILLOSCOPIO: RAPPRESENTAZIONE

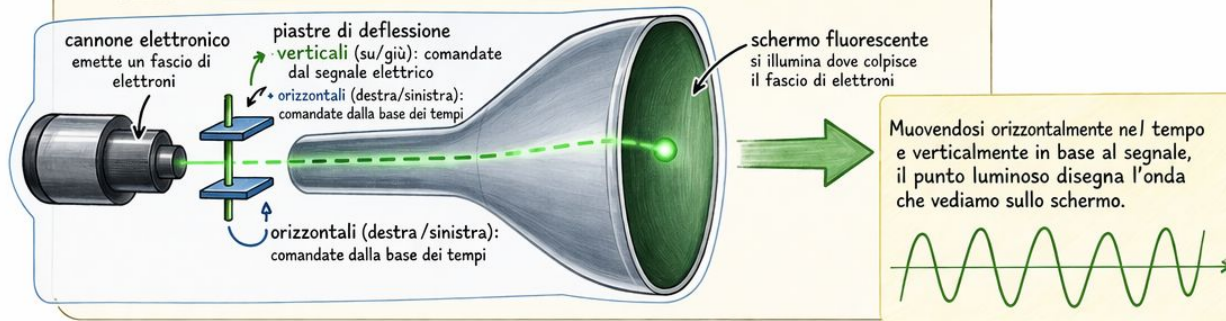
L'oscilloscopio trasforma il segnale elettrico in un punto luminoso su uno schermo, mostrandone l'andamento nel tempo.



IN SINTESI



COME FUNZIONA DENTRO L'OSCILLOSCOPIO (TUBO A RAGGI CATODICI)



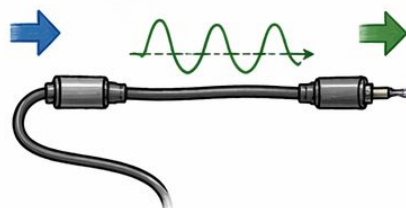
1. IL MICROFONO

produce un segnale elettrico (variazione di tensione)



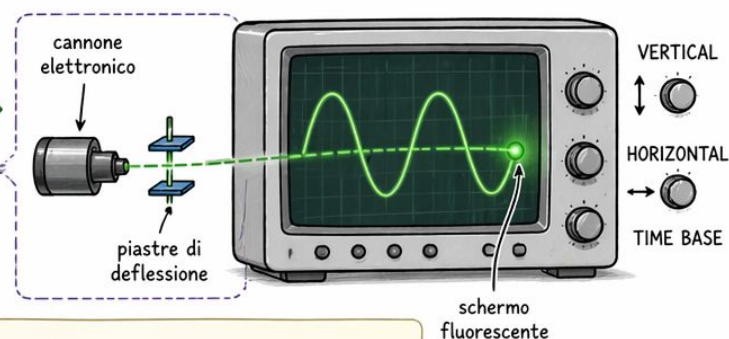
2. IL CAVO

trasmette il segnale all'oscilloscopio



3. DENTRO L'OSCILLOSCOPIO

- un cannone elettronico genera un fascio di elettroni
- gli elettroni colpiscono lo schermo fluorescente → punto luminoso



PUNTO FONDAMENTALE

Il segnale del microfono **NON** porta elettroni allo schermo.



Serve solo a **CONTROLLARE** il movimento del fascio.

— segnale elettrico (dal microfono)

- - - fascio di elettroni (generato dall'oscilloscopio)

COME SI DISEGNA L'ONDA

TEMPO

→ movimento da sinistra a destra



il tempo fa avanzare il punto sullo schermo

SEGNALE

→ sposta il punto su e giù



segnale = 0
punto al centro



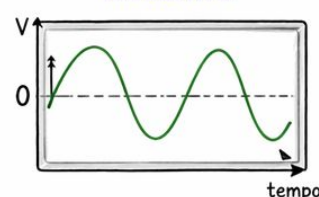
segnale positivo
punto verso l'alto



segnale negativo
punto verso il basso



RISULTATO



il punto luminoso si muove e disegna la forma d'onda



IN SINTESI: Elettroni = penna

Segnale = mano

Schermo = foglio

FORMULA CHIAVE

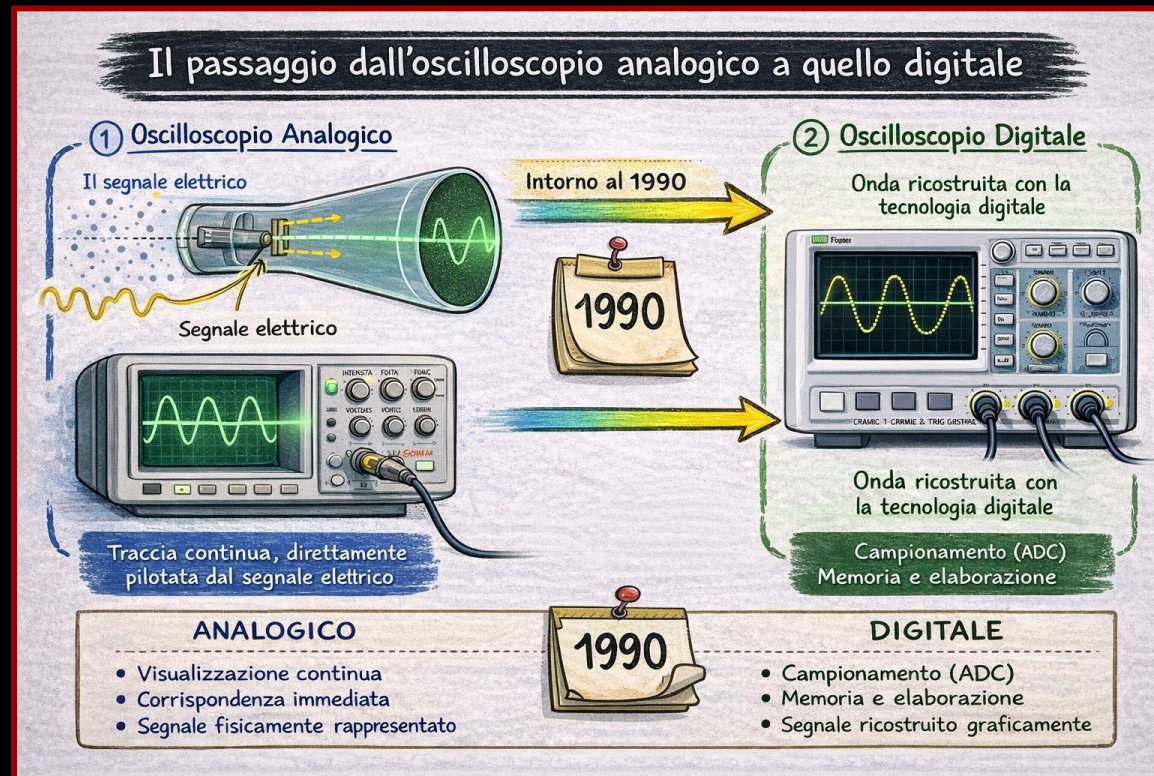
Il dispositivo **GENERA** gli elettroni.
Il segnale decide **DOVE VANNO**.



Oscilloscopio analogico e digitale

Nell'*oscilloscopio analogico* vediamo il segnale mentre avviene. L'onda è continua e isomorfa, cioè ha la stessa forma del segnale. Il segnale elettrico muove direttamente il punto luminoso sullo schermo.

Nell'*oscilloscopio digitale* vediamo una traccia ricostruita: una rappresentazione discreta, campionata e ricostruita. L'onda che vediamo è una ricostruzione dei dati: non è più il segnale che muove direttamente il punto, ma un algoritmo (una serie di calcoli) che lo rappresenta.



DAL SUONO ALLO SCHERMO (DIGITALE)

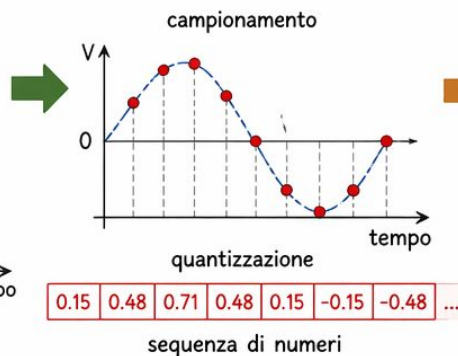
1. MICROFONO

suono → segnale elettrico
(analogico)



2. CONVERSIONE (ADC)

segnale continuo → campioni
→ numeri



3. COMPUTER

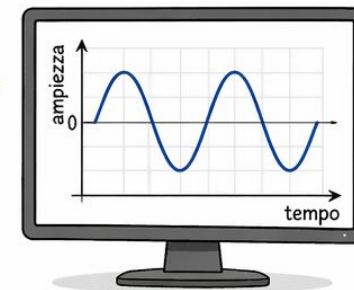
numeri → elaborazione
→ rappresentazione



il computer elabora i numeri
e prepara l'immagine

4. SCHERMO

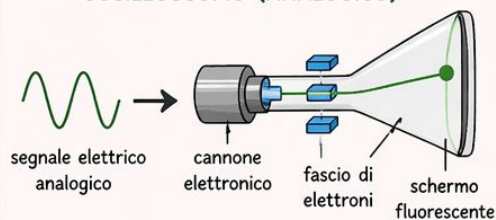
grafico dell'onda
nel tempo



l'onda è mostrata
sullo schermo

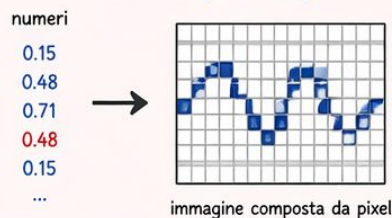
DIFFERENZA FONDAMENTALE

OSCILLOSCOPIO (ANALOGICO)



il segnale **CONTROLLA** il movimento
del fascio di elettroni sullo schermo

COMPUTER (DIGITALE)



l'immagine è **DISEGNATA DIGITALMENTE**
(pixel), non c'è nessun fascio di elettroni

PUNTO CHIAVE



Il suono
→ non muove direttamente qualcosa sullo schermo
→ viene trasformato in **NUMERI**,
poi in **IMMAGINE**

IDEA CHIAVE



segnale
continuo

0.15
0.48
0.71
...

numeri

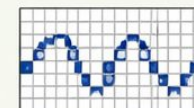


immagine
(sullo schermo)



RIASSUNTO: Suono → Segnale elettrico → Numeri → Immagine (non fascio di elettroni)

L'onda sinusoidale o suono puro



- I suoni puri → la forma più semplice di vibrazione sonora; permettono di studiare isolatamente i parametri del suono. Sono rari nella realtà, li si incontra quasi solo in laboratorio, oppure approssimativamente nel suono di un diapason non percosso troppo violentemente.
- All'ascolto risultano poveri: nei gravi ricordano un brusio, negli acuti sono stabili ma poco brillanti, spesso percepiti come innaturali.
- In ambienti riverberanti è difficile localizzarli; possono essere percepiti con altezze diverse tra i due orecchi (*diplacusia binaurale*) e la loro altezza può variare con l'intensità, più che nei suoni musicali.
- Alle basse frequenze (sotto il Do centrale), i suoni puri risultano meno “forti” rispetto ai suoni prodotti dagli strumenti musicali, anche a parità di energia.

Il generatore di segnale

- l'oscilloscopio non genera il segnale, ma lo visualizza → mostra nel tempo un segnale elettrico che arriva dall'esterno.
- Da dove viene allora la sinusoide in un oscillatore?
Serve un *generatore di segnale* (o un software): un *sintetizzatore* analogico o digitale.

Generatore → segnale elettrico → oscilloscopio → onda visibile

Waveform → tipo di onda (timbro).

Frequency → altezza (Hz).

Amplitude → volume.

Offset → sposta l'onda su/giù.

Output → uscita verso oscilloscopio.



Il sintetizzatore digitale

Schema del sintetizzatore digitale:

Algoritmo → dati digitali → convertitore (DAC) → segnale elettrico → altoparlante.
Nel digitale, il suono nasce come calcolo, poi diventa segnale e infine suono effettivo.

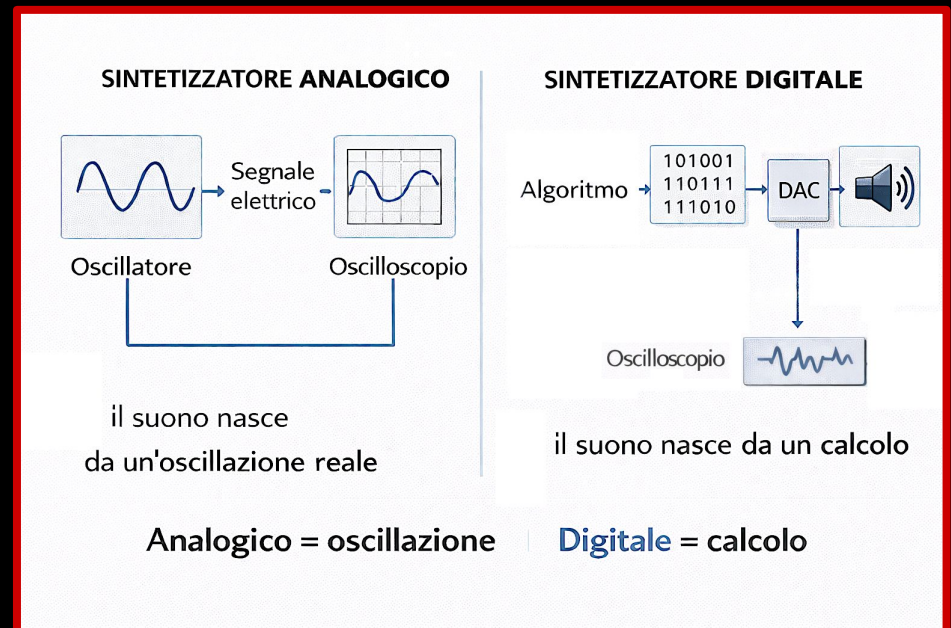
- *L'algoritmo* → calcola la forma dell'onda e genera i *dati digitali* o i numeri che descrivono il suono. Il *DAC* (convertitore) → trasforma i numeri in *segnale continuo* o *elettrico* → *onda analogica*. L'altoparlante → produce il suono nell'aria.

ANALISI

(dal suono esistente alla rappresentazione)
suono → microfono → segnale elettrico
→ ADC → numeri → schermo.

SINTESI

(dal calcolo al suono effettivo generato)
numeri → DAC → segnale elettrico →
altoparlante → suono.



L'importanza delle sinusoidi per lo studio del suono

Se i suoni puri sono così “limitati”, perché hanno un ruolo così importante negli esperimenti sull'udito e nella comprensione dei suoni musicali? Le ragioni sono in parte *matematiche*, in parte legate alla *percezione*.

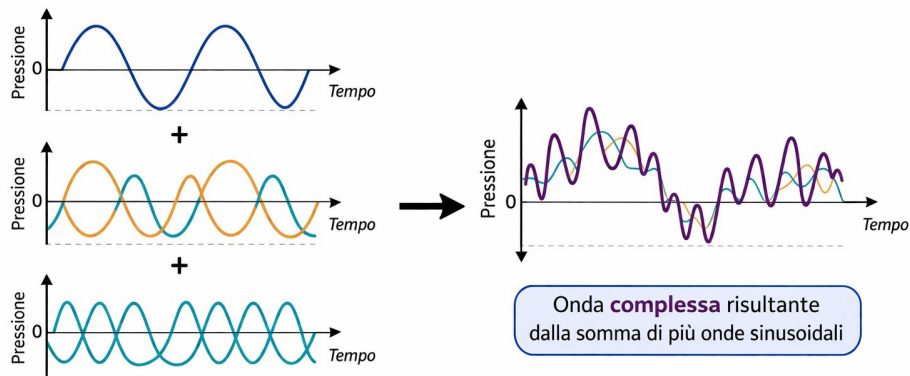
Le onde sinusoidali hanno proprietà matematiche particolari: ogni variazione periodica della pressione dell'aria può essere descritta come una combinazione di sinusoidi.

La sinusoide ha una doppia natura:

- è un suono fisico semplice che può essere prodotto e osservato in laboratorio;
- è un modello matematico che utilizziamo per rappresentare e analizzare anche i suoni più complessi.

Un suono puro è una variazione sinusoidale della pressione dell'aria nel tempo.

Matematicamente è possibile rappresentare una **variazione periodica della pressione dell'aria** come una **somma di componenti sinusoidali**.



L'onda sinusoidale: le caratteristiche fondamentali

Una sinusoide (o onda pura) è descritta dai seguenti elementi.

1. **Ampiezza (P)** → è la massima variazione della pressione rispetto al valore medio; indica di quanto la pressione (P) dell'aria si discosta sopra e sotto l'equilibrio.
[ampiezza maggiore → maggiore intensità sonora].

2. **Periodo (T)** → è il tempo di un'oscillazione completa.

3. **Frequenza (f)** → è quante oscillazioni avvengono in un secondo.

Si calcola così: $f = 1 / T$

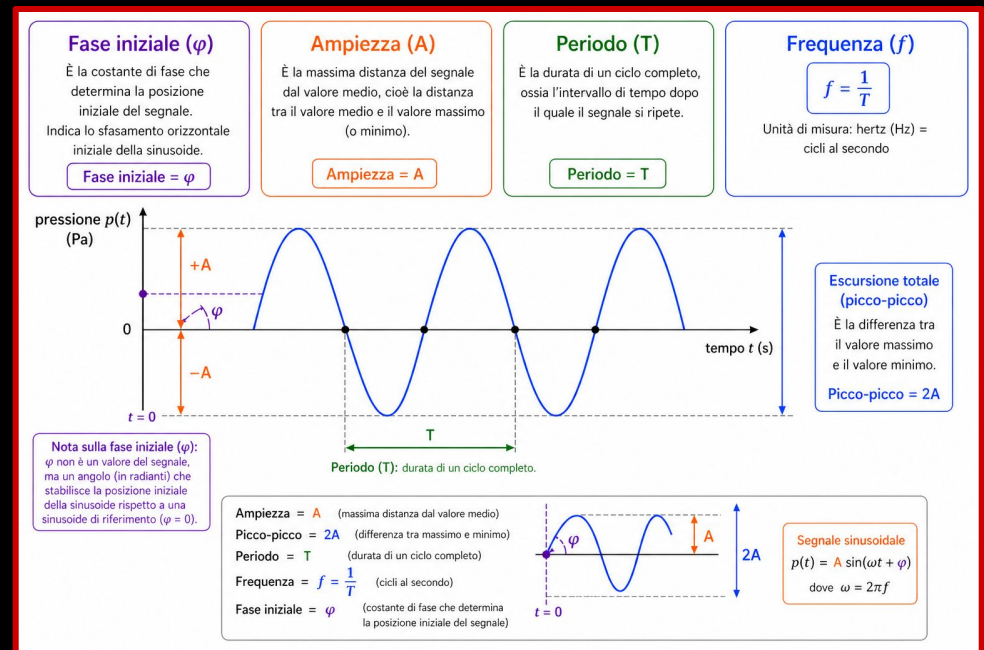
4. **Fase (φ)** → quale punto del ciclo si trova l'onda in un dato istante.

Ampiezza = volume.

Frequenza = altezza.

Periodo = durata di un ciclo.

Fase = la posizione nel ciclo in un dato momento.



La formula della sinusoide

$$y = A \sin(2\pi f t + \phi)$$

y è uguale all'ampiezza A moltiplicata per il seno di due pi greco per la frequenza f per il tempo t , più la fase ϕ (fi).

y è un numero che cambia nel tempo t , oscillando in modo regolare sopra e sotto lo zero.

y è lo spostamento istantaneo dell'onda rispetto alla posizione di equilibrio

Nel suono: la variazione di pressione in un dato momento.

- $A \rightarrow$ ampiezza $\rightarrow$ quanto è “forte” il suono.
- $f \rightarrow$ frequenza $\rightarrow$ quante volte l'oscillazione si ripete in un secondo.
- $t \rightarrow$ tempo.
- ϕ (fi) $\rightarrow$ fase $\rightarrow$ da dove parte l'oscillazione.
- **sin** (seno) $\rightarrow$ *una funzione che produce un'onda regolare.*
- $2\pi \rightarrow$ *numero fisso che serve per descrivere un ciclo completo dell'onda.*

Questa formula descrive un movimento che sale e scende in modo regolare, e che si ripete sempre uguale.

È il modello matematico di un **suono puro** (un suono semplice, senza componenti aggiuntive) $\rightarrow$ *non è “il suono reale”, ma un modello matematico che usiamo per descrivere e prevedere ciò che otteniamo sperimentalmente.*

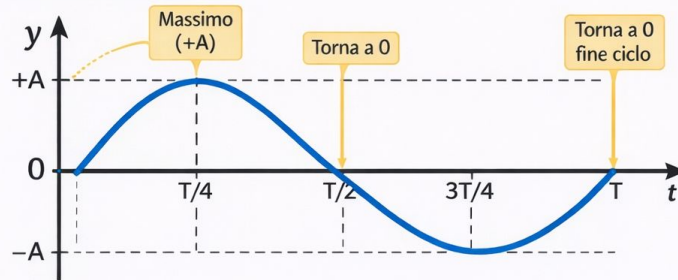
Un ciclo completo dell'onda sinusoidale

La sinusoide: modello del suono puro

y → spostamento istantaneo
rispetto all'equilibrio
 t → tempo

$$y = A \sin(2\pi f t + \phi)$$

$\sin$ → funzione che crea
un'oscillazione regolare
 2π → un ciclo completo



A ampiezza
quanto è grande
l'oscillazione
→ legata all'intensità
del suono

f frequenza
quante volte
si ripete
in un secondo

ϕ fase
da dove parte
l'oscillazione

Modello matematico
di un suono puro,
utilizzato per descrivere
e analizzare il suono:
movimento regolare
che si ripete sempre
uguale, strumento per
descrivere e prevedere
ciò che osserviamo
sperimentalmente.

Il ciclo completo
dell'onda
sinusoidale è
generato e
regolato dalla
funzione seno,
che ne determina
l'andamento nel
tempo

0 → inizio ($y = 0$)

$T/4$ → massimo ($y = +A$)

$T/2$ → centro ($y = 0$)

$3T/4$ → minimo ($y = -A$)

T → fine ciclo ($y = 0$)

Ampiezza del segnale sonoro

L'ampiezza descrive la variazione della pressione sonora e determina l'intensità percepita:

Maggiore ampiezza → suono più forte;

Minore ampiezza → suono più debole.

L'udito umano è limitato da due *soglie*:

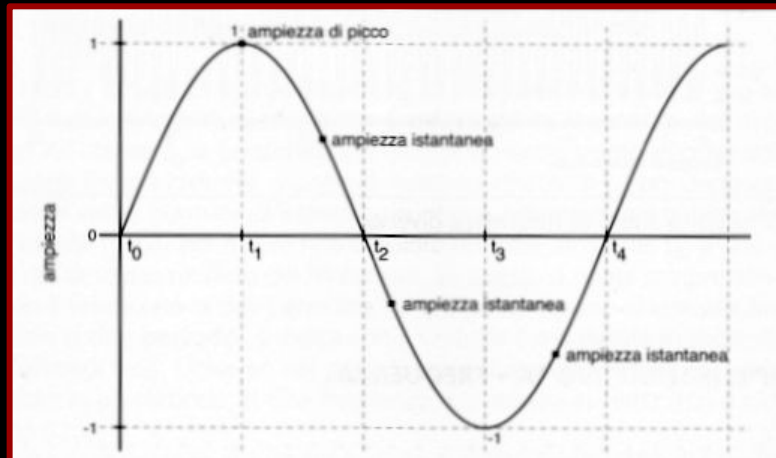
- *soglia inferiore di udibilità* → pressione minima percepibile.
- *soglia del dolore* → pressione massima tollerabile, oltre la quale si producono dolore e possibili danni all'orecchio [$\approx 120\text{--}130$ dB SPL (Sound Pressure Level)].

Nell'onda sinusoidale:

- ampiezza di picco → valore massimo (positivo o negativo) raggiunto dalla pressione;
- ampiezza istantanea → valore della pressione in un dato istante.

Quando si parla di ampiezza di un suono, ci si riferisce convenzionalmente all'ampiezza di picco.

Nel tempo, l'ampiezza varia in modo periodico: parte da zero, cresce fino al massimo, torna a zero, raggiunge il minimo negativo e risale, completando un ciclo.



Digitalizzazione del suono e rappresentazione dell'onda

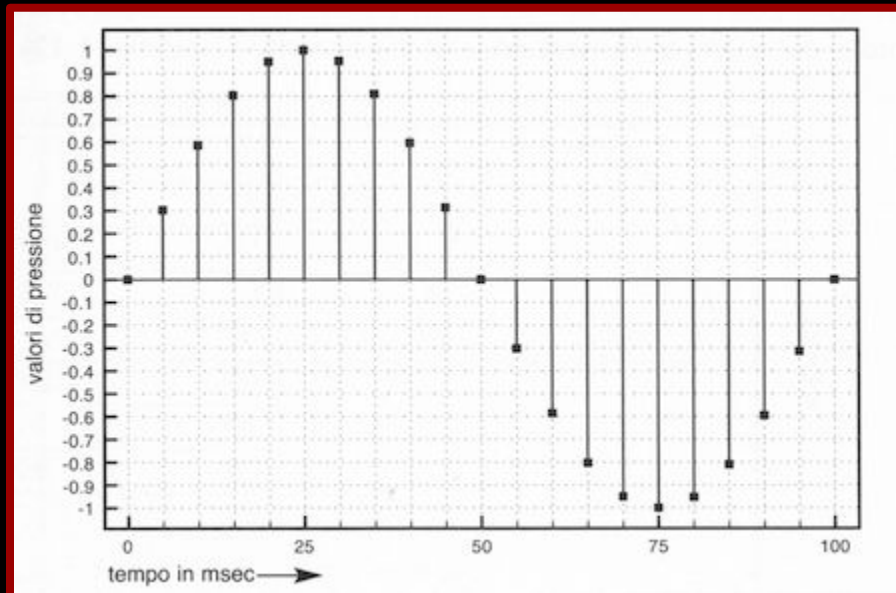
Nel processo di digitalizzazione, il segnale continuo della pressione sonora viene trasformato in una sequenza di valori numerici discreti. Questi valori rappresentano l'andamento dell'onda nel tempo e permettono di ricostruirla.

I valori sono solitamente normalizzati tra +1 e -1:

- valori positivi → compressione dell'aria;
- valori negativi → rarefazione;
- valore 0 → pressione di equilibrio (assenza di segnale).

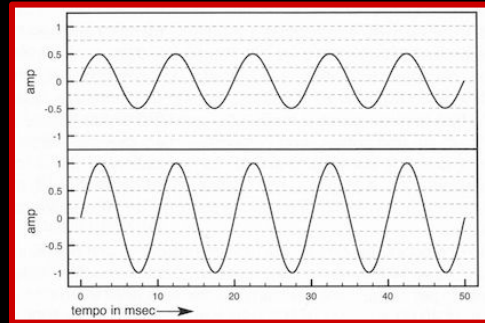
Se non c'è suono, la sequenza è composta solo da zeri. L'ampiezza massima dell'onda è detta *ampiezza di picco*: se vale 1, l'onda oscilla tra -1 e +1.

La *fase* indica infine in quale punto del ciclo si trova l'onda in un dato istante.

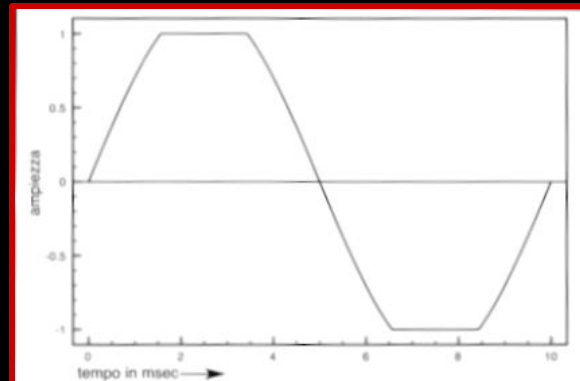


Ampiezza di picco e variazione dell'intensità del segnale

Se impostiamo 0.5 come ampiezza di picco (cioè metà del valore massimo), l'onda oscillerà tra +0.5 e -0.5, mantenendo la stessa forma ma con intensità minore (come mostrato in figura).



Se l'ampiezza del segnale in uscita verso la scheda audio supera il valore massimo rappresentabile (ad esempio oscilla tra +1.2 e -1.2), la scheda non può riprodurla correttamente: tutti i valori oltre +1 e sotto -1 vengono limitati e riportati rispettivamente a +1 e -1. Questo fenomeno, detto **clipping**, comporta uno “schiacciamento” dell'onda ai limiti del sistema, con conseguente deformazione del segnale e distorsione del suono.



***dB* in acustica e nel digitale: due riferimenti diversi**

I dB sono sempre una misura relativa, ma il valore di riferimento base cambia.

In ***acustica*** (dB SPL → *Sound Pressure Level*).

- Riferimento fisico: **20μPa** (20 micropascal = 20 milionesimi di pascal, cioè la pressione sonora minima percepibile dall'orecchio umano)

Esempi:

- 0 dB SPL → suono appena udibile.
- 60 dB SPL → conversazione normale.
- 120 dB SPL → soglia del dolore.

Nel ***digitale*** (dBFS = *decibel full scale*) il riferimento è dato dal massimo livello del sistema, quindi:

- 0 dBFS → massimo (oltre → clipping)
- -6 dBFS ≈ metà ampiezza del segnale (non metà del volume percepito).
- I valori sono ≤ 0 dBFS.

Relazione tra i due sistemi

- dB SPL → livello reale del suono nell'aria.
- dBFS → livello interno al sistema digitale.

Scala dei livelli di pressione sonora (dB SPL)

Livelli di pressione sonora (dB SPL) (misurati indicativamente a 1 m di distanza)

140 dB → rischio immediato di danno

130 dB → jet in decollo (a breve distanza)

120 dB → soglia del dolore / concerto molto forte

110 dB → orchestra sinfonica (fff)

100 dB → autocarro / traffico pesante

90 dB → strada molto rumorosa

85–80 dB → classe rumorosa / agitata (😞)

80 dB → negozio affollato

70 dB → ufficio

60 dB → conversazione normale

50 dB → casa tranquilla

40 dB → ambiente molto silenzioso

30 dB → fruscio di foglie

20 dB → quasi silenzio

10 dB → soglia molto bassa percepibile

0 dB → soglia di udibilità

- In acustica (dB SPL) si parte dal valore minimo (0 dB = suono più debole).
- In informatica/audio digitale (dBFS) si parte dal valore massimo (0 dB = massimo livello, oltre → clipping).

Relazioni psicoacustiche tra intensità e frequenza

- *L'intensità influenza l'altezza percepita:*
 - sopra ≈ 2000 Hz ($\approx$ Si5) $\rightarrow$ aumentando l'intensità, il suono può apparire più acuto;
 - sotto ≈ 1000 Hz ($\approx$ Si4) $\rightarrow$ aumentando l'intensità, il suono può apparire più grave;
 - si tratta di un effetto percettivo non costante.
- *La frequenza influenza l'intensità percepita (loudness):*
 - orecchio più sensibile alle frequenze medie ($\approx 2\text{--}5$ kHz);
 - meno sensibile ai bassi e alle alte frequenze.
- *Conseguenza*
 - per ottenere la stessa sensazione di volume:
 - i bassi richiedono maggiore pressione sonora;
 - le frequenze medie ne richiedono meno.

Per descrivere queste variazioni della percezione, negli anni '30 del Novecento Harvey **Fletcher** (1884–1981) e Wilden **Munson** (1900–1952), presso i *Bell Telephone Laboratories* (sede di New York), elaborarono le *curve isofone*, che rappresentano graficamente come varia la sensibilità dell'orecchio umano alle diverse frequenze.

Il *phon* e le curve isofone

Per comprendere le curve isofone, occorre capire che cos'è il *phon*.

Il phon è:

- l'unità di misura della *sensazione* di intensità sonora (loudness);
- indica suoni percepiti come ugualmente forti;
- Riferimento: a 1000 Hz, il valore in phon coincide con i dB SPL (vedi il grafico nella prossima slide).

Il phon misura come percepiamo il suono, non la sua energia fisica.

Scala orientativa dei phon (sensazione uditiva):

0 phon → soglia di udibilità.

20 phon → suono molto debole (fruscio leggero).

40 phon → ambiente molto silenzioso.

60 phon → conversazione normale.

80 phon → traffico intenso.

100 phon → concerto / ambiente molto rumoroso.

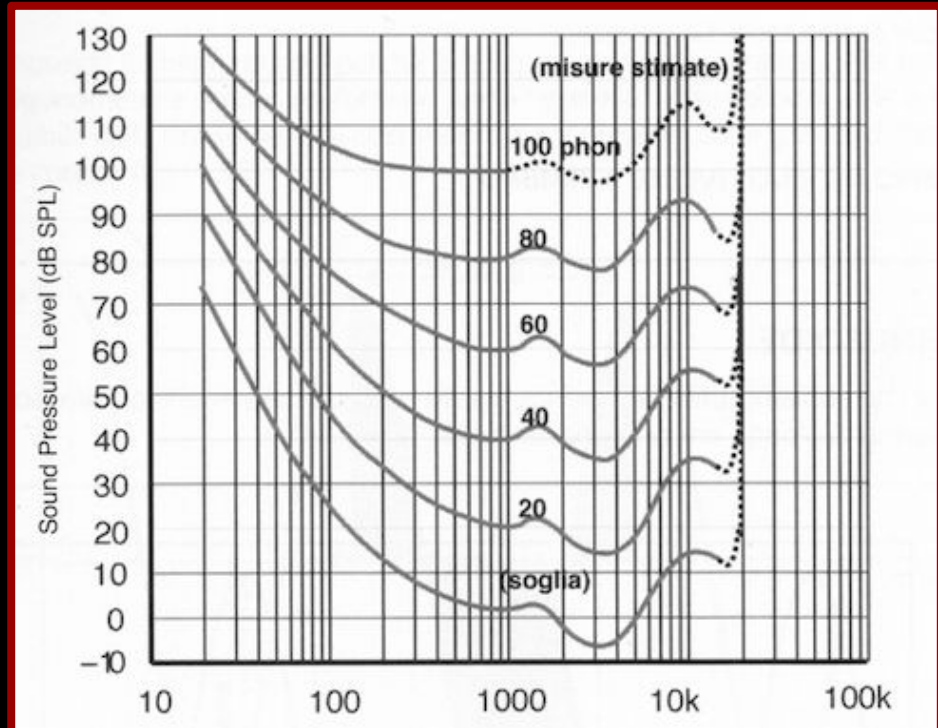
120 phon → soglia del dolore.

A parità di phon, la sensazione è la stessa, ma la pressione sonora (dB SPL) necessaria cambia con la frequenza.

Curve isofone e sensibilità dell'orecchio umano

- Le curve isofone rappresentano graficamente la sensibilità dell'orecchio alle diverse frequenze a diversi livelli di pressione sonora.
- Sull'asse verticale → i livelli di pressione sonora in dB SPL; sull'asse orizzontale → le frequenze.
- Le curve sono espresse in *phon* e indicano, per ciascuna frequenza, quale pressione sonora è necessaria per produrre la stessa sensazione di intensità nell'ascoltatore.
- La frequenza di riferimento è 1000 Hz: a questa frequenza, i valori in *phon* coincidono con quelli in dB SPL (ad esempio: 60 phon = 60 dB SPL).

Seguendo, ad esempio, la curva a 60 phon, a 1000 Hz sono necessari 60 dB; scendendo verso le basse frequenze, sono necessari più dB per ottenere la stessa sensazione sonora.



Sinusoide e curve isofone: dal suono alla percezione

La sinusoide è il modello matematico-fisico elementare del suono; le curve isofone descrivono come l'orecchio umano percepisce l'intensità dei suoni alle diverse frequenze.

1. La *sinusoide*, sul piano fisico: onda pura → una sola frequenza.

Parametri controllati: frequenza (f), ampiezza (A).

2. Le *curve isofone* (piano percettivo)

- Misurano la sensazione di intensità in *phon*.
- Mostrano che la sensibilità dell'orecchio non è neutro variando con la frequenza (massima tra ~2–5 kHz).

3. Il collegamento.

- Le curve isofone sono ottenute sperimentalmente usando toni puri (sinusoidi).
- Una sinusoide → uno stimolo controllato per testare l'udito che permette di isolare una singola frequenza.
- In questo modo si studia il rapporto tra frequenza e intensità percepita (loudness).

A parità di ampiezza fisica: → la percezione cambia con la frequenza.

Basse frequenze → servono più dB // Medie frequenze → bastano meno dB.

Sinusoide = modello fisico, Curve isofone = risposta dell'orecchio

→ Il suono è un fenomeno psico-fisico, non solo fisico.

La *frequenza* della sinusoide e la relazione col *periodo*

In passato la frequenza veniva espressa in cicli al secondo. Oggi si usa il termine **Hertz** (Hz), in onore del fisico Heinrich Hertz → 1 Hz = 1 ciclo al secondo.

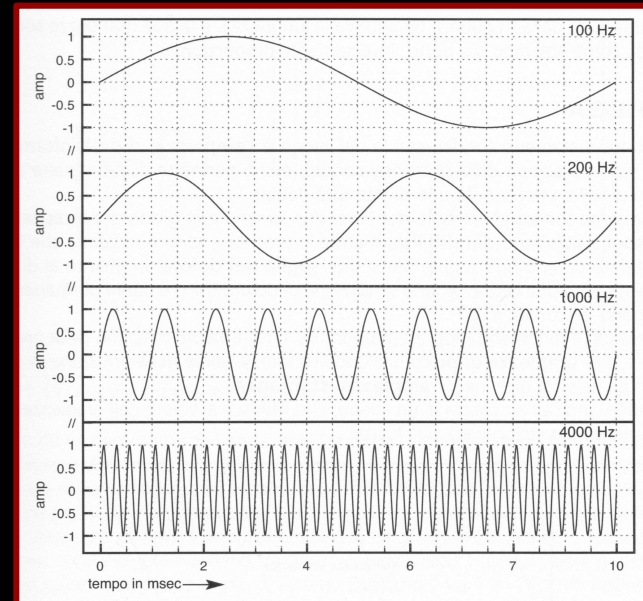
Frequenza e periodo sono legati da una relazione molto semplice:

$$f = 1 / T$$

Esempi:

- Se una sinusoide ha frequenza 440 Hz → periodo è $T = 1 / 440 \approx 0,0023$ secondi.
- Se una sinusoide ha periodo 0,001 secondi: → frequenza è $f = 1 / 0,001 = 1000$ Hz

4 suoni di frequenza diversa



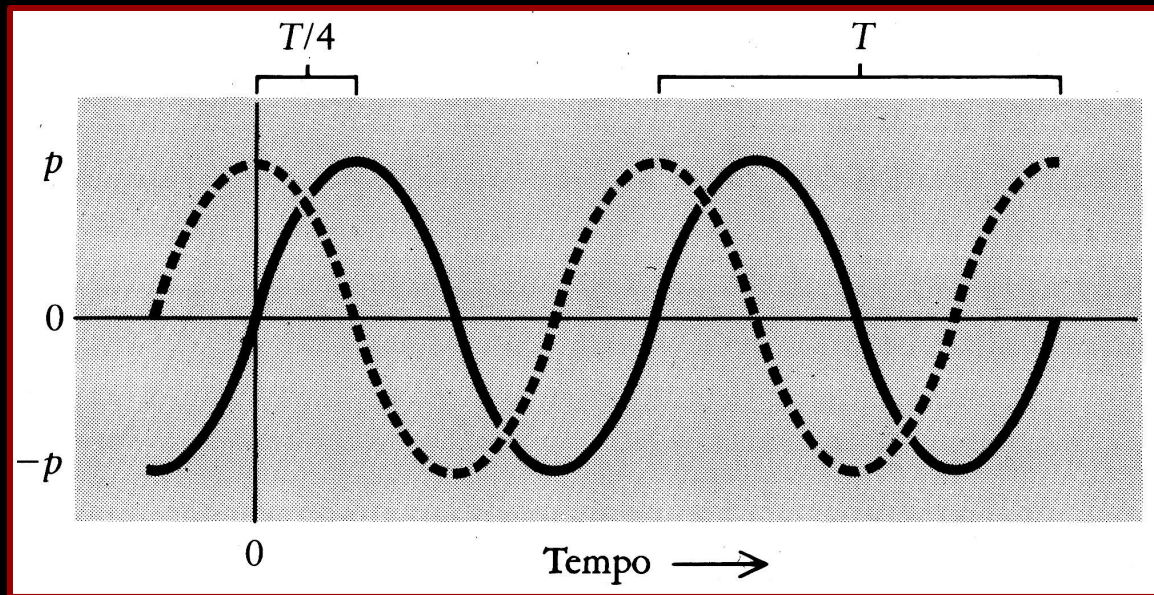
Frequenza → quante oscillazioni al secondo.

Periodo → durata di un ciclo.

Fase → il punto del ciclo in cui l'onda sinusoidale si trova in un certo istante.

La *fase* (ϕ) dell'onda: posizione nel ciclo

1. Indica in quale punto del ciclo si trova l'onda in un dato istante.
 - È uno sfasamento temporale (anticipo/ritardo).
 - Si misura in radianti o in gradi.
2. Due sinusoidi identiche (stessa frequenza e ampiezza) possono essere spostate nel tempo: una può partire dal massimo, l'altra da zero → differiscono solo per la fase.
3. Significato fisico: la fase determina quando avvengono i picchi (massimi/minimi). Non cambia né la frequenza, né l'ampiezza. È quindi un parametro di posizione temporale
4. Effetti importanti (fisici). Quando più onde si combinano:
 - stessa fase → somma (interferenza costruttiva);
 - fase opposta (π) → cancellazione (interferenza distruttiva).
5. Effetto percettivo
 - Su una singola sinusoide → non percepibile.
 - Su suoni complessi → può influenzare:
 - l'attacco (transienti);
 - la forma d'onda risultante;
 - in alcuni casi, la localizzazione spaziale.



In questa figura la curva non tratteggiata taglia l'asse in $t=0$. La curva tratteggiata ha un massimo in $t=0$ dopo aver tagliato l'asse $T/4$ periodi prima (cioè $1/4$ di periodo prima di $t=0$.) La prima curva è chiamata curva sinusoidale, mentre la seconda curva cosinusoidale. *Le due curve differiscono solo in fase.*

La fase indica in quale punto del ciclo si trova un'onda in un certo istante.

Onde *bipolari* e *unipolari*

Le onde sonore sono normalmente ***bipolari*** → oscillano attorno allo zero alternando compressione e rarefazione.

Le onde ***unipolari*** sono spostate rispetto allo zero (offset) → non rappresentano direttamente una vibrazione fisica completa.

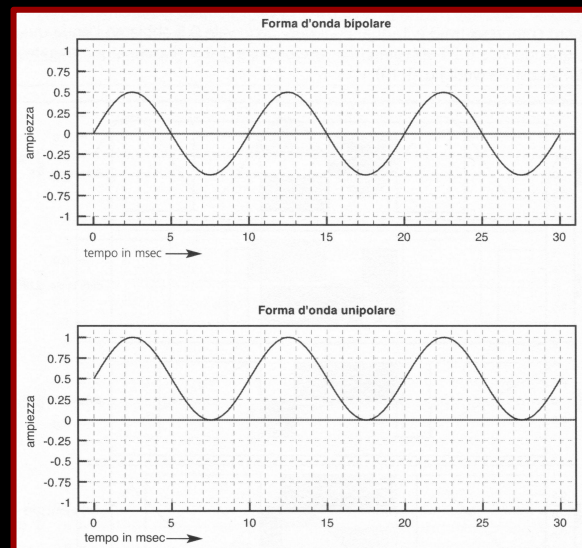
Il suono udibile dipende dalla parte oscillante (AC = Alternating Current).

La componente DC rappresenta uno spostamento del valore medio (offset) e, pur non essendo udibile, può influenzare il comportamento del segnale e dei sistemi che lo elaborano (nei processi di modulazione del suono).

Bipolari → audio (suono);

Unipolari → controllo (es. inviluppi, modulazioni).

Il suono nasce da un'oscillazione attorno all'equilibrio, non da uno spostamento unilaterale.



Sintesi e analisi del suono: verso la comprensione del timbro

Un suono complesso può essere costruito e scomposto come insieme di sinusoidi.
Il suono non è unitario: è una struttura composta.

1. ***Sintesi additiva*** (costruire il suono) → somma di sinusoidi = suono complesso.

Componenti: fondamentale (f) con le sue armoniche ($2f$, $3f$, $4f$...).

Variando le ampiezze e le fasi → cambia la forma d'onda.

Si tratta di *costruire* il suono controllandone le componenti.

2. L'*analisi* o la scomposizione del suono → un suono reale può essere *scomposto* in sinusoidi, e ogni componente ha una frequenza, un' ampiezza e la sua fase.

Analizzare = rendere visibile la struttura interna.

3. Dal segnale alla *forma d'onda* (timbro) → la combinazione delle sinusoidi produce una forma d'onda specifica. La *forma d'onda* determina il timbro.

Timbro = configurazione delle componenti sinusoidali. Questo studio non descrive direttamente i suoni naturali, ma: → costruisce dei modelli controllati (sinusoidi) per comprendere fenomeni complessi.

Metodo: semplificare → analizzare → ricostruire.

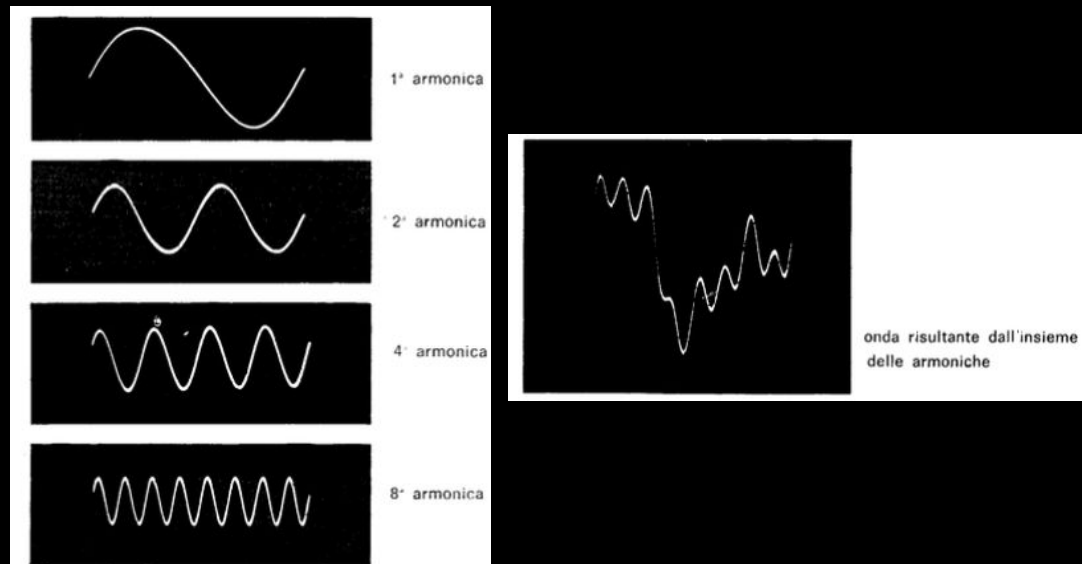
Tra modello e realtà: il limite della sintesi sinusoidale

Limite del modello. La sintesi e analisi sinusoidale sono approssimazioni:

- i suoni reali non sono perfettamente periodici, cambiano nel tempo (attacco, decadimento), includono rumore e componenti non armoniche;
- il timbro dipende anche dall'*evoluzione temporale*, dalle *risonanze* e dall'interazione con l'ambiente.

*Le sinusoidi spiegano una parte del fenomeno, non tutto.
Modello sinusoidale → comprensione parziale del timbro.*

Le sinusoidi ci aiutano a capire il suono, ma il suono reale è sempre più complesso del modello.



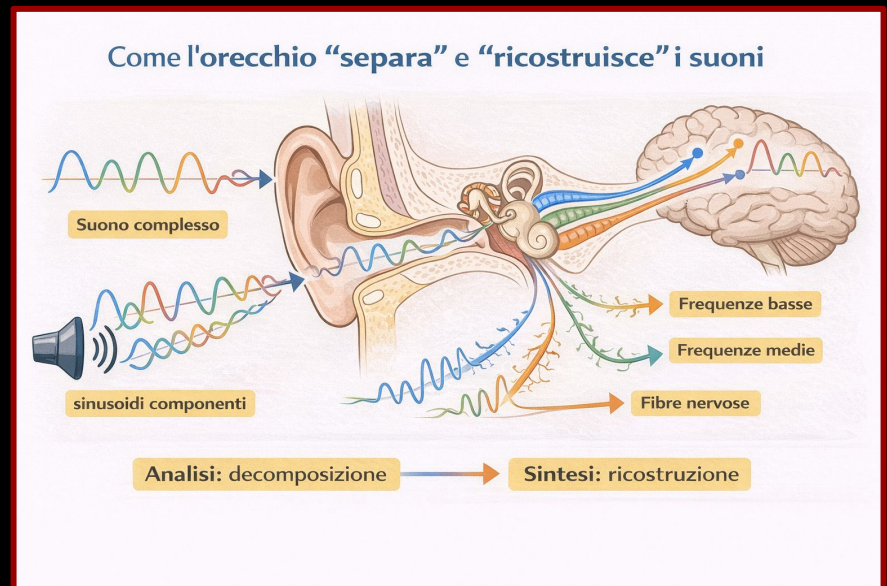
La sinusoide come paradigma neurofisiologico dell'ascolto

L'orecchio $\approx$ un analizzatore-sintetizzatore di suoni

Il sistema uditivo è in grado, almeno in parte, di distinguere le diverse componenti sinusoidali di un suono in base alla loro frequenza. Quando ascoltiamo un suono musicale - ad es., la voce di un cantante o il suono di un clarinetto - l'onda sonora, che è complessa, può essere pensata *come* composta da più onde sinusoidali. Queste componenti attivano fibre nervose diverse che collegano l'orecchio al cervello.

→ *Ciò che può essere descritto matematicamente come una somma di sinusoidi corrisponde anche, almeno in parte, al modo in cui il nostro orecchio analizza il suono.*

La sinusoide svolge quindi una duplice funzione epistemica: è al tempo stesso un modello fisico (producibile e misurabile) e un modello matematico (strumento di analisi). In questo senso, essa costituisce il paradigma attraverso cui interpretiamo la relazione tra meccanica dell'orecchio e attività del cervello nell'ascolto.



Dalla sinusoide al modello matematico del suono

Anche se un suono concreto ci appare percettivamente come unitario, esso è costituito da una molteplicità di componenti → un'unità percepita $\neq$ semplicità strutturale.

1. Il nostro sistema uditivo analizza le componenti di un suono attivando regioni e fibre diverse in base alla frequenza; il cervello integra queste informazioni restituendo un'esperienza unitaria.

L'ascolto, secondo questo paradigma, è già una forma di analisi del suono.

2. Il problema teorico: se il suono è percepito come uno, ma è composto da più elementi, come descrivere questa struttura nascosta?

3. ***Jean-Baptiste Joseph Fourier*** (1768-1830) ha formalizzato la possibilità di descrivere i fenomeni complessi come combinazioni di elementi semplici. Questo metodo nasce nello studio del calore e poi è stato applicato al suono (Hermann von Helmholtz). Fourier ha fornito un linguaggio matematico universale per analizzare il suono.

4. Il metodo di Fourier permette di passare dall'esperienza del suono alla sua struttura interna. Ha reso possibile: 1) analizzare in parte il timbro; 2) comprendere la composizione dei suoni; 3) sviluppare tecniche di sintesi (es. additiva)

La serie di Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Il matematico **Fourier** ha concepito un modello esplicativo (inizio XIX sec.) in base alla quale ogni *onda periodica* può essere descritta come una **somma** di onde sinusoidali. (*Fourier si è occupato soprattutto di funzioni periodiche*). In realtà Fourier ha studiato il calore scoprendo che una distribuzione complessa della temperatura può essere descritta come somma di funzioni sinusoidali. Questo metodo si è rivelato poi valido anche per il suono. **Hermann von Helmholtz** (1821–1894) è colui che ha portato concretamente questa teoria nel dominio del suono.

Un suono complesso (es., di uno strumento musicale) è interpretabile e analizzabile come una onda composta da più sinusoidi sovrapposte e ognuna con:

- una propria ampiezza;
- una propria frequenza;
- una propria fase.

Le frequenze delle sinusoidi non sono casuali, bensì sono dei multipli interi della frequenza fondamentale: f (fondamentale), $2f$, $3f$, $4f$...

Un suono complesso $\approx$ un “accordo” di tante sinusoidi. Anche i suoni più complessi possono essere scomposti in onde pure o semplici.



La formula generale della Serie di Fourier è:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Il modello di Fourier applicata all'onda quadra

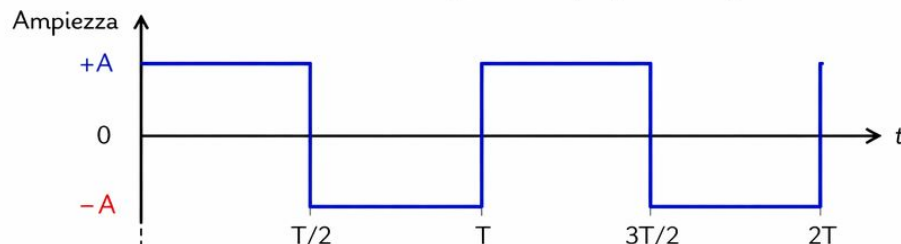
Il modello di Fourier afferma che ogni onda periodica può essere descritta come somma di sinusoidi;

- si crea però un problema → possono servire infiniti termini;
- in pratica → basta un numero finito di componenti per ottenere un'approssimazione arbitrariamente precisa, ma la scomposizione è teoricamente infinita, sebbene sia operativamente sempre finita.

Il caso paradigmatico: l'onda quadra (*non trattata da Fourier*) → solo armoniche dispari. L'onda quadra è esemplare perché è semplice da percepire, ma complessa matematicamente. Una onda quadra di ampiezza 1 e frequenza fondamentale f si ottiene sommando f , $3f$, $5f$, $7f$, ... Le ampiezze delle armoniche dispari diminuiscono $1/n$ (n dispari), con un fattore di scala costante.

Una proprietà importante:
l'**onda quadra** non è una forma elementare;
è in realtà una costruzione di infinite sinusoidi. Nel modello di Fourier anche una forma apparentemente “semplice” è in realtà composta.

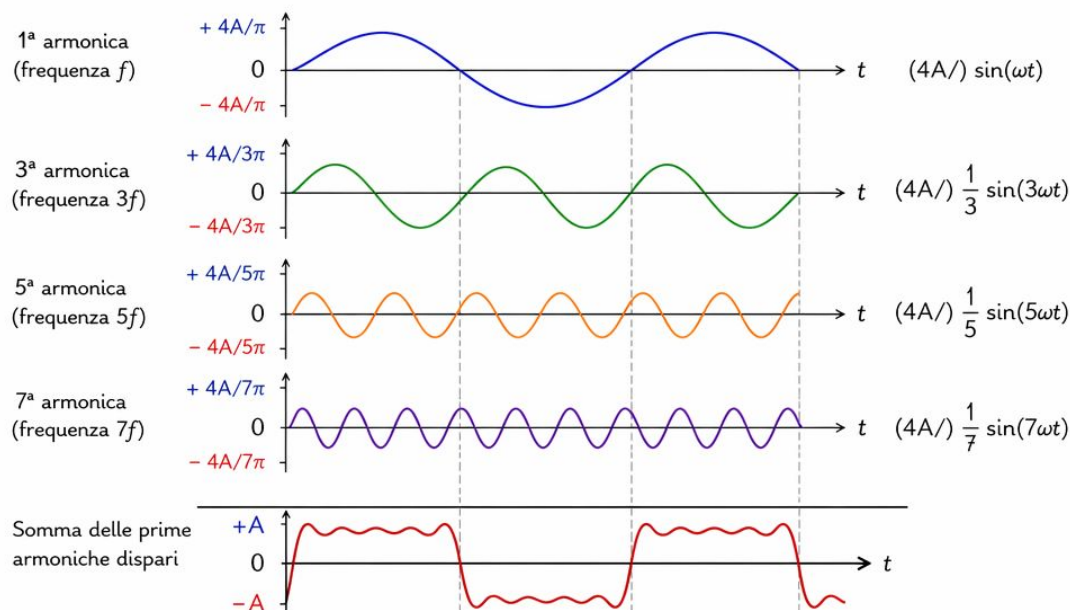
ONDA QUADRA (ampiezza $\pm A$)



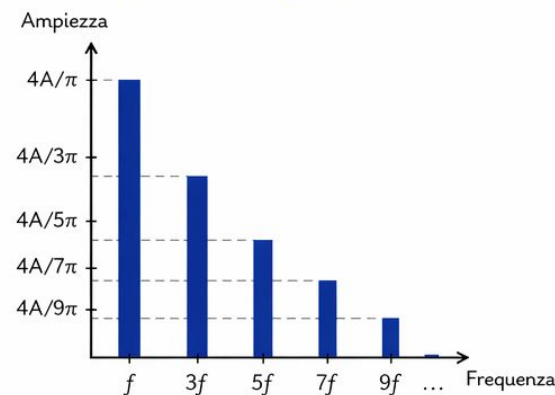
SERIE DI FOURIER

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega t) + \dots \right)$$

COSTRUZIONE DELL'ONDA QUADRA SOMMANDO LE ARMONICHE DISPARI



SPETTRO DI AMPIEZZA (armoniche dispari)



Le ampiezze delle armoniche dispari decrescono secondo la legge $1/n$.
 Solo le armoniche dispari sono presenti (nessuna componente continua e nessuna armonica pari).

COME LEGGERE LA FORMULA

$f(t)$: valore del segnale (onda quadra) nel tempo t .

A : ampiezza dell'onda quadra (il segnale assume i valori $+A$ e $-A$).

ω : pulsazione, cioè $\omega = 2\pi f$ (rad/s).

f : frequenza fondamentale (Hz).

$\sin(\omega t)$: prima armonica (frequenza f).

$\sin(3\omega t)$: terza armonica (frequenza $3f$).

$\sin(5\omega t)$: quinta armonica (frequenza $5f$). E così via...

I coefficienti $1, 1/3, 1/5, 1/7, \dots$ indicano le ampiezze relative delle armoniche: ciascuna armonica dispari ha ampiezza $(4A/\pi) \cdot (1/n)$, $\left\{ \begin{array}{l} \text{fattore comune} \\ 4A/\pi \end{array} \right.$ con $n = 1, 3, 5, 7, \dots$

L'onda quadra

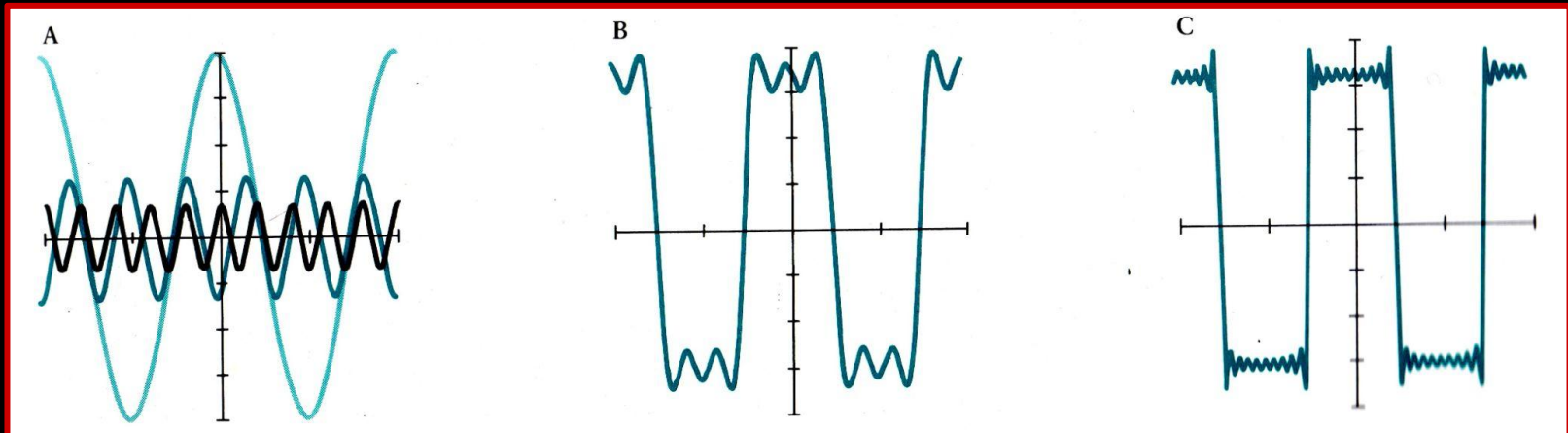
Un'onda quadra ha la caratteristica peculiare di avere solo componenti di frequenza dispari. La maggior parte delle onde sonore consiste di componenti che hanno frequenze sia dispari che pari (anche se è vero che le canne chiuse dell'organo e alcuni strumenti a fiato hanno prevalentemente componenti di frequenza dispari.)

Nel disegno sottostante:

A. tre onde di frequenza $f, f3, f5$

B. L'onda che risulta addizionando le tre onde illustrate in A.

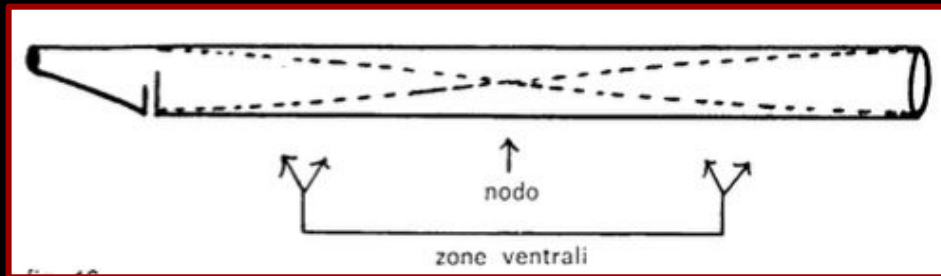
C. L'approssimazione a un'onda quadra ottenuta addizionando i primi 19 elementi della successione di frequenze vista in A.



Una digressione: tubi sonori e armoniche dispari un esempio reale dell'onda quadra

La serie di Fourier non è solo un modello astratto, ma uno strumento per comprendere il suono reale, come mostra la distinzione tra *canne aperte* e *chiuse*.

Nelle canne sonore esiste un rapporto preciso tra lunghezza del tubo e lunghezza d'onda fondamentale: il tubo determina direttamente le lunghezze d'onda possibili e quindi le frequenze emesse. Nelle corde, invece, a parità di lunghezza, la frequenza fondamentale può variare con la tensione.



In una canna aperta a entrambe le estremità l'aria è libera di muoversi, perciò alle estremità si formano ventri (massima oscillazione).

Perché si stabilisca un'onda stazionaria è necessario almeno un nodo (oscillazione nulla), che nel suono fondamentale si trova circa al centro del tubo.

La configurazione risultante è quindi: ventri alle estremità, nodo al centro, condizione che rende possibile la vibrazione stazionaria fondamentale.

Perché nel tubo aperto la canna contiene mezza onda

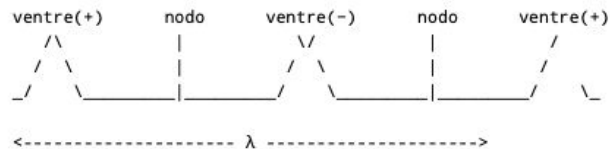
Significato dei simboli:

- L = lunghezza fisica della canna (il tubo reale);
- λ (lambda) = lunghezza d'onda completa del suono.

Punto decisivo $\rightarrow$ per confrontare la lunghezza della canna con la lunghezza dell'onda bisogna considerare l'onda intera, non solo il tratto nel tubo. Il tubo mostra solo una parte dell'onda. La lunghezza d'onda (λ) è il ciclo completo.

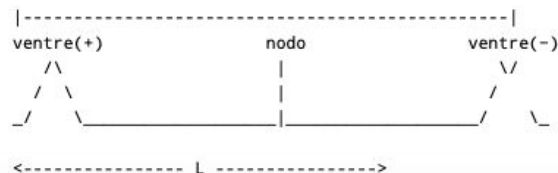
Regola chiave. Una lunghezza d'onda è la distanza minima dopo cui l'onda si ripete identica (stessa fase). Non bastano due ventri: devono essere nella stessa fase.

L'onda completa (quella che bisogna considerare)



Questa è la vera lunghezza d'onda. Perché il primo e l'ultimo punto sono uguali (stessa fase).

Quello che sta dentro il tubo



Rapporto tra canna (L) e onda (λ).

Se confrontiamo il tubo con l'onda completa:

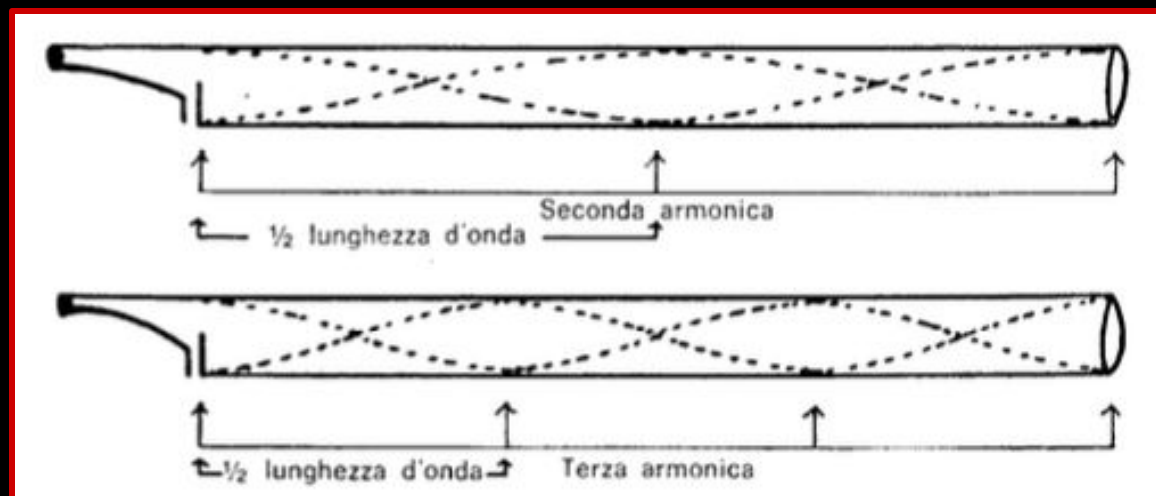
L corrisponde a metà di λ

$$L = \lambda/2$$

$$\text{quindi: } \lambda = 2L$$

Dalla fondamentale alle armoniche: modi di vibrazione nel tubo sonoro

Variando le condizioni di eccitazione, una canna sonora può vibrare non solo secondo la frequenza fondamentale, ma anche secondo modi di vibrazione superiori (armoniche). Queste armoniche hanno frequenze che sono multipli della fondamentale (f , $2f$, $3f$, ... nel caso di un tubo aperto).



A ciascuna armonica corrisponde una diversa distribuzione di nodi (punti fermi) e di ventri (massima oscillazione).

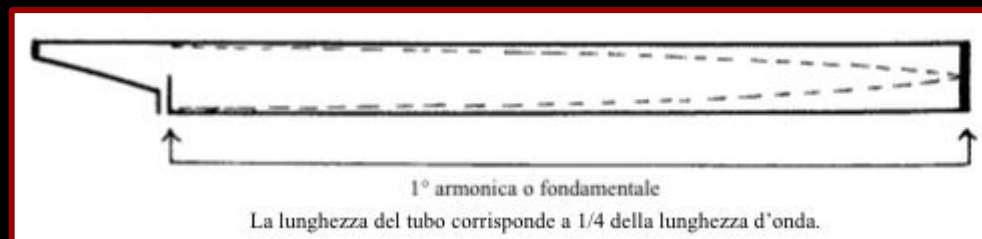
Nel tubo si formano quindi diverse onde stazionarie, ciascuna con una propria configurazione spaziale.

Canne chiuse (tubi tappati a un'estremità)

Nella famiglia delle canne sonore utilizzate negli strumenti musicali, esistono tubi chiusi a un'estremità, detti *canne chiuse*. In queste canne:

- all'estremità chiusa si forma un nodo (l'aria non può oscillare liberamente);
- all'estremità aperta si forma un ventre (massima oscillazione).

Questo accade perché l'onda sonora si riflette all'estremità chiusa senza inversione di fase, creando un punto fisso (nodo).



Conseguenza fondamentale

Rispetto a una canna aperta:

- la lunghezza d'onda fondamentale λ è doppia;
- quindi la frequenza è dimezzata.

A parità di lunghezza, una canna chiusa produce un suono più grave (un'ottava sotto) rispetto a una canna aperta.

Questo principio permette, ad esempio, negli organi di ottenere suoni gravi utilizzando tubi più corti (circa metà lunghezza).

Canne chiuse: perché emergono solo le armoniche dispari

Nelle canne chiuse (tappate a un'estremità), la condizione fondamentale è:

- all'estremità chiusa deve esserci sempre un nodo (l'aria non si muove);
- all'estremità aperta deve esserci un ventre (massima oscillazione).

Non tutte le onde stazionarie sono possibili:

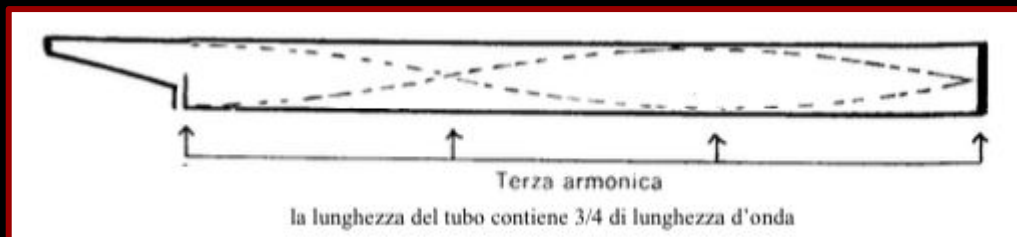
sono ammesse solo quelle configurazioni che rispettano queste condizioni.

In particolare:

- le armoniche pari ($2f$, $4f$, $6f$, ...) richiederebbero un ventre anche all'estremità chiusa → impossibile (contraddice il nodo imposto dalla chiusura);
- le armoniche dispari (f , $3f$, $5f$, ...) rispettano invece la disposizione nodo-ventre → sono le uniche possibili.

La chiusura del tubo impone un nodo fisso: questo elimina le armoniche pari e lascia solo quelle dispari.

$$\begin{aligned}\text{Nodo} \rightarrow \text{ventre} &= 1/4 \lambda \\ 1/4 \times 3 &= 3/4\end{aligned}$$



Nelle canne chiuse puoi sommare solo un numero dispari di quarti d'onda:

- fondamentale → $1/4 \lambda$
- terza armonica → $3/4 \lambda$
- quinta armonica → $5/4 \lambda$

Sia la canna chiusa sia l'onda quadra producono solo armoniche dispari, perché la loro struttura impone condizioni che escludono le armoniche pari.

Clarinetto (≈ canna chiusa)

Clarinetto → solo armoniche dispari
Oboe → armoniche pari + dispari



Ancia
singola

non è un tappo rigido
ma un sistema dinamico
(valvola)

si comporta
come una
canna
chiusa

Oboe (≈ canna aperta)



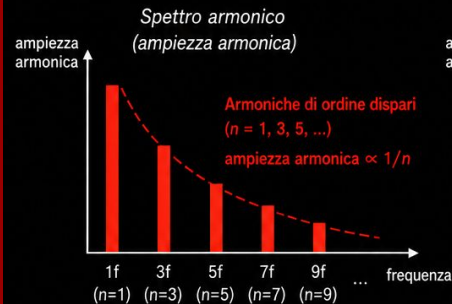
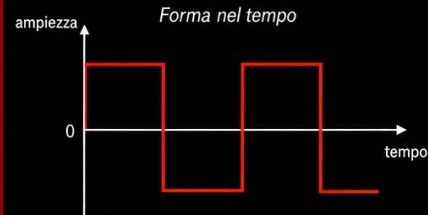
Ancia
doppia

non è un'apertura
libera perfetta

il comportamento
globale è molto più
vicino a una canna
aperta

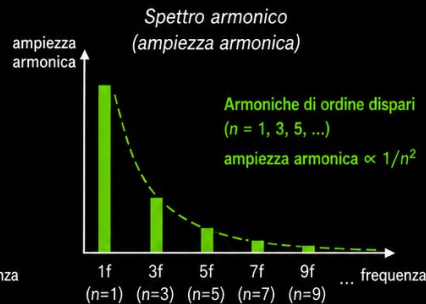
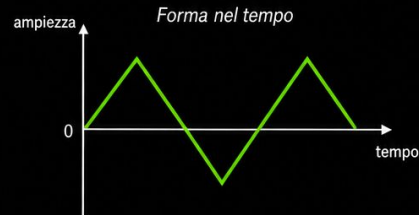
ONDA QUADRA vs ONDA TRIANGOLARE

ONDA QUADRA (duty cycle 50%, simmetrica)



- **Forma:** presenta discontinuità istantanee tra valore massimo e minimo.
- **Armoniche:** solo di ordine dispari ($n = 1, 3, 5, \dots$).
Le ampiezze armoniche decrescono lentamente ($\propto 1/n$), quindi molte armoniche mantengono ampiezze significative.
- **Timbro:** brillante, ricco di armoniche alte, più aggressivo e tagliente.

ONDA TRIANGOLARE (simmetrica)



- **Forma:** varia in modo lineare e continuo, senza salti.
- **Armoniche:** solo di ordine dispari ($n = 1, 3, 5, \dots$).
Le ampiezze armoniche decrescono rapidamente ($\propto 1/n^2$), perciò le armoniche alte sono deboli.
Le armoniche successive alternano il segno (inversione di fase).
- **Timbro:** più morbido e dolce, più vicino alla sinusoidale.

Nota: se il duty cycle NON è 50% (onda quadra non simmetrica), compaiono anche armoniche pari e cambia lo spettro.



IDEA CHIAVE: sia l'onda quadra (simmetrica) sia l'onda triangolare (simmetrica) contengono solo armoniche di ordine dispari.
Nella quadra le ampiezze armoniche diminuiscono lentamente ($\propto 1/n$), nella triangolare molto rapidamente ($\propto 1/n^2$).
Questo spiega la differenza di timbro tra i due suoni.

Le forme d'onda ideali mostrate sono modelli matematici utili per l'analisi e la sintesi dei suoni.

Onda a dente di sega: struttura armonica e decrescita delle ampiezze

È un'onda che cresce in modo continuo e poi cade bruscamente, ripetendo questo andamento. Questa discontinuità è ciò che la rende diversa dalla semplice sinusoide. L'onda a dente di sega è la somma (teoricamente infinita) di sinusoidi: tutte le armoniche della fondamentale sono presenti (f , $2f$, $3f$, ...) e le loro ampiezze decrescono come $1/n$ (dove n è il numero dell'armonica). Questo è un caso classico di analisi/sintesi di Fourier: una forma d'onda non sinusoidale viene costruita sommando onde pure.

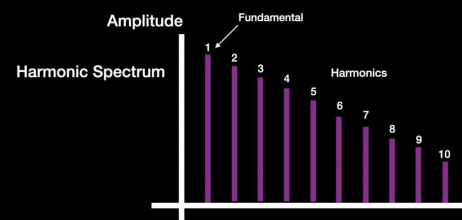
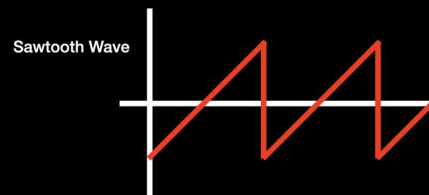
Esempio.

- 1^a armonica → ampiezza grande (1)
- 2^a armonica → metà ($1/2$)
- 3^a armonica → un terzo ($1/3$)
- 4^a armonica → un quarto ($1/4$)
- e così via

Ogni armonica aggiunge un “dettaglio” alla forma d'onda:

- le prime (più forti) definiscono la forma generale;
- le alte (più deboli) aggiungono finezza e spigolosità.

La caduta brusca dell'onda richiede molte armoniche anche se deboli, sono essenziali per ricreare quello “spigolo”. Poiché sono presenti tutte le armoniche (anche se via via più deboli), il suono risulta più “tagliente” rispetto ad altre onde (es. sinusoidale o quadrata).

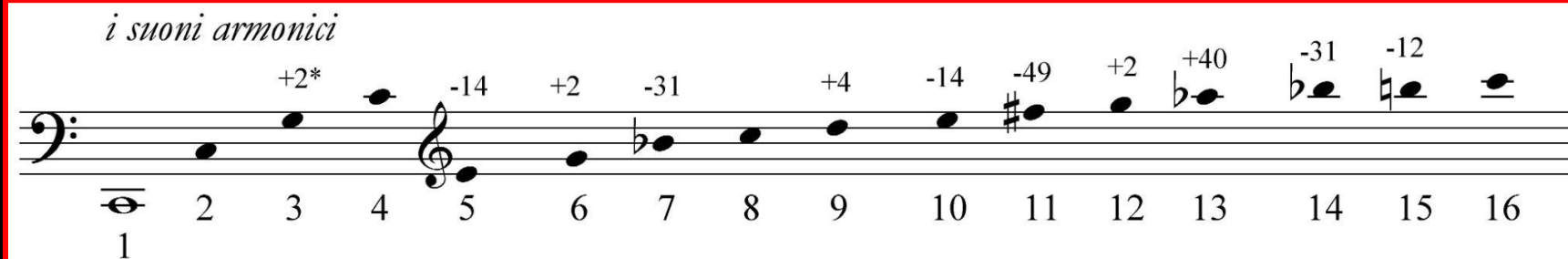


Tre differenti sistemi per classificare le componenti sinusoidali

Vi sono tre differenti sistemi per classificare le componenti sinusoidali di un suono periodico. Si noti che il numero associato a un'armonica o parziale è lo stesso della frequenza relativa; per esempio $4f$ è la quarta armonica o la quarta parziale. Ma $4f$ - la quarta armonica - è il terzo sovratono: è importante non confondere questi tre termini.

Figura 3.5. Le prime dodici armoniche naturali del Do₂.

Frequenze	Armoniche	Sovratoni	Parziali
f	Fondamentale	Fondamentale	Prima parziale
$2f$	Seconda armonica	Primo sovratono	Seconda parziale
$3f$	Terza armonica	Secondo sovratono	Terza parziale
$4f$	Quarta armonica	Terzo sovratono	Quarta parziale



* in cents, confrontati con la scala temperata

Parziali armoniche e parziali inarmoniche.

Armoniche → le frequenze sono multipli interi della fondamentale (f , $2f$, $3f$, $4f$, ...) Questo vale per suoni strettamente periodici come quelli ideali trattati con Fourier.

Molti suoni reali - gli strumenti a percussione e gli oggetti vibranti non “accordati” (aste, piastre, campane) - presentano frequenze che non sono multipli interi della fondamentale [es. → $2.756f$, $5.450f$, $8.933f$, ...]

In questo caso non è corretto parlare di “armoniche” perché manca la struttura multipla regolare.

Terminologia corretta: armoniche → solo per multipli interi;
 parziali → termine generale sempre corretto.

Quindi:

- suoni periodici → parziali armoniche;
- suoni non periodici / complessi → parziali non armoniche o *inarmoniche*.

Formulazione corretta per i non periodici → *parziali inarmoniche* (da evitare “armoniche non armoniche”).

La numerazione segue sempre l'ordine crescente delle frequenze (sia per le strutture armoniche che inarmoniche)

1. 1° parziale → frequenza più bassa (fondamentale).
2. 2° parziale → seconda frequenza;
3. 3° parziale → terza frequenza.

Serie di Fourier e *Integrale* di Fourier: due modi di descrivere il suono

L'idea fondamentale di Fourier $\rightarrow$ ogni suono può essere visto come una somma di sinusoidi, oggetti ideali perfettamente periodici e infiniti nel tempo.

La serie di Fourier (il modello originario) $\rightarrow$ studia i fenomeni periodici la cui struttura implica una somma discreta:

- Frequenze: armoniche $\rightarrow f, 2f, 3f, \dots$
- *Spettro discreto* $\rightarrow$ descrive bene i suoni stabili (note tenute).

L'integrale o trasformata di Fourier è un'estensione successiva: studia i suoni non periodici o finiti nel tempo, la cui struttura è un continuo di frequenze.

- Non più solo armoniche $\rightarrow$ tutte le frequenze possibili.
- *Spettro: continuo* $\rightarrow$ ***non si sommano alcune onde, ma tutte le onde possibili.***

Non sono due teorie diverse $\rightarrow$ Serie di Fourier = diviene un caso particolare dell'integrale.

Dal discreto al continuo: nascita della trasformata di Fourier

L'*integrale* di Fourier nasce in acustica da un problema più generale:
come estendere la teoria di Fourier a *funzioni non periodiche*.

Fourier → ha studiato il calore impiegando funzioni spesso periodiche o trattate come tali. I matematici successivi (es., **Riemann**) → hanno voluto trattare i segnali finiti in quanto fenomeni *non ripetitivi*. In altri termini: Fourier ha studiato i fenomeni che si ripetono; i matematici successivi hanno studiato i fenomeni che accadono una sola volta.

L'integrale di Fourier nasce da questa intuizione:

concepire una funzione *non periodica* come il limite di una funzione periodica, il cui periodo cresce infinitamente.

Immagina un singolo evento sonoro ripetuto periodicamente ogni intervallo (T).

Se il periodo è piccolo → le ripetizioni sono vicine;

se il periodo aumenta → gli eventi si allontanano sempre di più.

Nel limite ($T \rightarrow \infty$), la distanza tra le ripetizioni diventa infinita e resta un solo evento isolato: la funzione non è più periodica.

Se T è piccolo, gli eventi sonori si susseguono ravvicinati:

evento — evento — evento — evento

la periodicità è evidente.

Se aumentiamo T , gli eventi si allontanano:

evento ————— evento ————— evento

Nota bene. Non confondere:

- la ripetizione dell'intero evento;
- le oscillazioni interne che lo costituiscono:

Un evento può non ripetersi mai, ma contenere comunque strutture oscillanti al suo interno che lasciano tracce nello spettro.

Dalla somma all'integrale: il limite della serie di Fourier

Serie di Fourier. La periodicità = uno spettro di frequenze discrete, separate da un intervallo →

$$\Delta f = \frac{1}{T}$$

Δ (delta): indica una differenza o un intervallo;
 f : è la frequenza.

Δf : è quindi l'intervallo tra due frequenze consecutive dello spettro.

T : è il periodo (il tempo dopo cui il fenomeno si ripete).

$1/T$: è l'inverso del periodo → determina la distanza tra le righe dello spettro discreto.

- se $T = 1$ secondo → $\Delta f = 1$ Hz
- se $T = 10$ secondi → $\Delta f = 0.1$ Hz
- se $T = 100$ secondi → $\Delta f = 0.01$ Hz

Quindi:

più grande è il periodo T , più piccolo è Δf , e più fitte sono le frequenze nello spettro.

Aumentando T , la distanza tra le frequenze diminuisce: le righe dello spettro si addensano sempre di più. Nel limite $T \rightarrow \infty$, lo spettro discreto diventa continuo e la somma delle armoniche si trasforma in un integrale:

la somma → integrale // lo spettro discreto → spettro continuo.

Nasce la trasformata (o integrale) di Fourier. Quanto più il periodo di un segnale cresce (fino a perdere la periodicità), tanto più il suo spettro passa da discreto a continuo.

COME NASCE LA SPAZIATURA SPETTRALE NELLA SERIE DI FOURIER

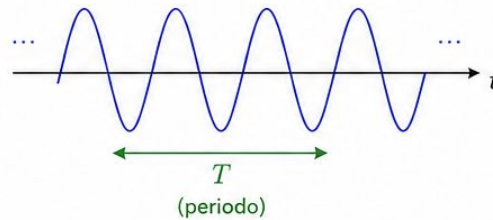
1 PERIODO → FONDAMENTALE

Un segnale periodico si ripete ogni T secondi.
La frequenza fondamentale è:

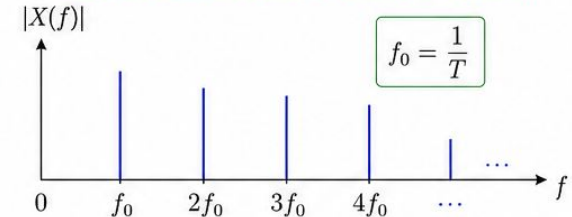
$$f_0 = \frac{1}{T}$$

(Hz)

SEGNALE NEL TEMPO



SPETTRO DI FREQUENZA (SERIE DI FOURIER)



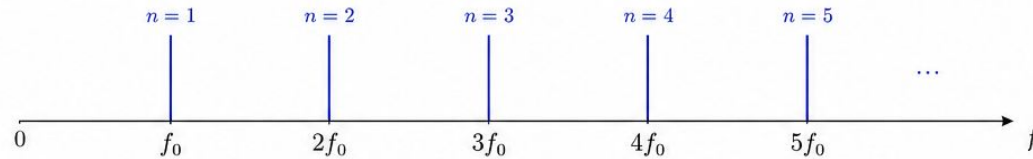
2 ARMONICHE DELLA SERIE

Le frequenze della serie di Fourier sono multipli interi della fondamentale:

$$f_n = n f_0$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$

RIGHE SPETTRALI (ARMONICHE)



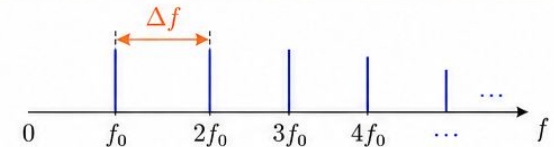
3 DISTANZA TRA RIGHE CONSECUTIVE

La distanza tra due righe consecutive è:

$$\Delta f = f_{n+1} - f_n$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{n+1} = (n+1)f_0 \\ f_n = n f_0 \end{array} \right\} \Delta f = (n+1)f_0 - n f_0$$

→ $\Delta f = f_0$



4 SPAZIATURA SPETTRALE

Poiché $f_0 = 1/T$, allora:

$$\Delta f = f_0 = \frac{1}{T}$$

La spaziatura tra le righe spettrali della serie di Fourier è l'inverso del periodo del segnale.

AL VARIARE DEL PERIODO T

T piccolo	→	f_0 grande	→	Δf grande (righe distanti)
T grande	→	f_0 piccolo	→	Δf piccolo (righe vicine)



IN SINTESI

PERIODO T → FONDAMENTALE $f_0 = \frac{1}{T}$ → ARMONICHE $f_n = n f_0$ → SPAZIATURA $\Delta f = f_{n+1} - f_n = f_0 = \frac{1}{T}$

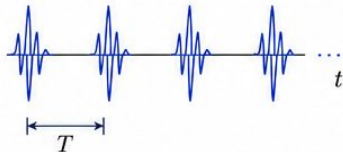
DALLA SERIE DI FOURIER ALLA TRASFORMATTA DI FOURIER

Aumentando il periodo T , le ripetizioni si allontanano e lo spettro discreto diventa sempre più fitto.
 Nel limite $T \rightarrow \infty$, le ripetizioni si allontanano indefinitamente: resta un solo evento isolato (funzione non periodica)
 e lo spettro discreto diventa continuo.

T aumenta $\rightarrow$

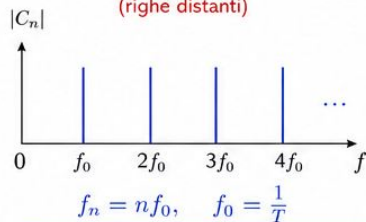
1. T piccolo

Evento sonoro ripetuto
ogni T (periodo piccolo)



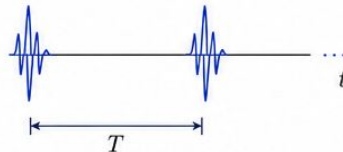
SPETTRO DI FREQUENZE (SERIE DI FOURIER)

$\Delta f = \frac{1}{T}$ grande
(righe distanti)



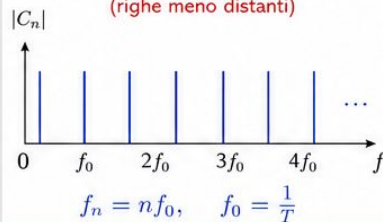
2. T medio

Evento sonoro ripetuto
ogni T (periodo medio)



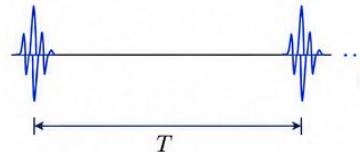
SPETTRO DI FREQUENZE (SERIE DI FOURIER)

$\Delta f = \frac{1}{T}$ medio
(righe meno distanti)



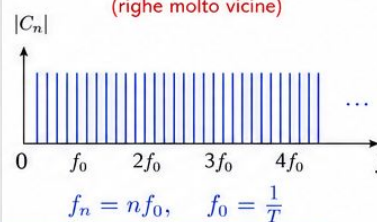
3. T grande

Evento sonoro ripetuto
ogni T (periodo grande)



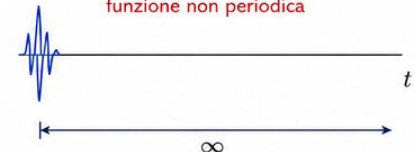
SPETTRO DI FREQUENZE (SERIE DI FOURIER)

$\Delta f = \frac{1}{T}$ piccolo
(righe molto vicine)



4. Limite: $T \rightarrow \infty$

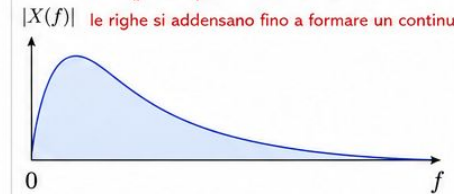
Nel limite $T \rightarrow \infty$, le ripetizioni si allontanano
indefinitamente e resta un solo evento isolato:
funzione non periodica



SPETTRO CONTINUO (TRASFORMATTA DI FOURIER)

$\Delta f \rightarrow 0$

(passo spettrale tende a zero:
le righe si addensano fino a formare un continuo)



SERIE DI FOURIER: somma di armoniche discrete

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \rightarrow x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \rightarrow x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

TRASFORMATTA DI FOURIER:
integrale su frequenze continue

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Aumenta T
(periodo)

$\Delta f = \frac{1}{T}$ diminuisce
(righe sempre più vicine)

Spettro discreto
(righe)

Spettro continuo
(funzione continua
di frequenza)

Somma $\rightarrow$ Integrale
nasce la trasformata
(o integrale) di Fourier

Nota: $f_0 = \frac{1}{T}$ è la frequenza fondamentale della serie di Fourier.

Le frequenze della serie sono $f_n = n f_0$ con $n \in \mathbb{Z}$ e la distanza tra frequenze adiacenti è $\Delta f = \frac{1}{T}$.

METAFORA DEL FILM: COME FUNZIONA L'ANALISI SPETTRALE

Tre tempi da distinguere: evento – durata – osservazione

1 IL FILM INTERO (EVENTO REALE)

L'evento reale accade una volta sola
(non si ripete globalmente).



← durata reale dell'evento Δt →

EVENTO GLOBALMENTE NON PERIODICO

Non esiste un periodo di ripetizione T_0 .
È unico, irripetibile.

2 MISURO LA SUA DURATA REALE

Considero l'intero evento per
quanto tempo realmente dura.



evento aperiodico
(non si ripete)

IDEA CHIAVE

più breve è l'evento → più estesa è la banda

Evento breve

- meno tempo per definirsi
- energia più distribuita nello spettro
- banda più estesa (larga)

3 SCELGO UNA FINESTRA DI OSSERVAZIONE

Osservo (analizo) solo un tratto
dell'evento per un tempo T .



LA FINESTRA STABILISCE LA RISOLUZIONE

$$\delta f = \frac{1}{T}$$

Griglia di frequenze più fitta
con finestra più lunga.

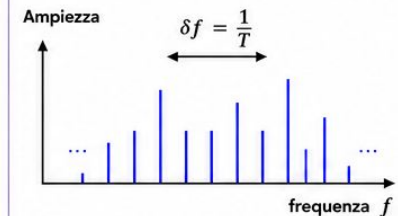


La finestra determina la risoluzione,
non il fenomeno.

4 ANALIZZO LO SPETTRO

L'analisi usa una griglia regolare
di frequenze.

Ingrandisco i dettagli nello spettro.



Le righe appartengono all'ANALISI,
non all'EVENTO.

Le strutture interne dell'evento
(modi, risonanze, transitori, ecc.)
lasciano distribuzioni di energia
nello spettro.

TRE DOMANDE FONDAMENTALI

- L'evento si ripete globalmente? → T_0 Periodicità globale (ontologia)
- Quanto dura davvero l'evento? → Δt Durata reale (morfologia)
- Quanto tempo osservo? → T Tempo di osservazione (epistemologia)

APERIODICITÀ DELL'EVENTO

≠

PERIODICITÀ DELLA GRIGLIA SPETTRALE

Il fenomeno è unico.
La griglia è uno strumento di analisi.

IN SINTESI

- T_0 determina se lo spettro è **DISCRETO** (righe equidistanti) o **CONTINUO** (nessuna spaziatura).
- Δt (durata reale) determina la **LARGHEZZA DELLO SPETTRO B** ($\approx 1/\Delta t$). Evento breve → banda larga.
- T (finestra di osservazione) determina la **RISOLUZIONE**: $\delta f = 1/T$. Finestra lunga → righe più vicine. (griglia più fitta).



IDEA CHIAVE: Per analizzare un evento complesso non periodico, non cerchiamo periodicità nel fenomeno.
Usiamo una griglia regolare di frequenze per leggerne la distribuzione energetica.

EVENTO REALE



FINESTRA T



ANALISI SPETTRALE



ANALISI SPETTRALE DI UN EVENTO COMPLESSO NON PERIODICO GLOBALMENTE

I TRE TEMPI FONDAMENTALI: PERIODO - DURATA - FINESTRA

1) PERIODO DI RIPETIZIONE GLOBALE (T_0)

ONTOLOGIA DEL SEGNALE: il segnale si ripete o no?

Determina la **SPAZIATURA** intrinseca delle righe spettrali.

$$\delta f_{\text{rep}} = \frac{1}{T_0}$$

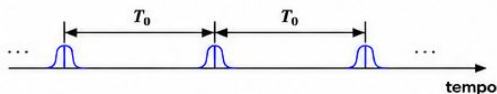
(spaziatura intrinseca dello spettro)

Se $T_0 \rightarrow \infty$ (nessuna ripetizione)

$$\Rightarrow \delta f_{\text{rep}} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ **spettro continuo**

(limite della serie $\rightarrow$ trasformata di Fourier)



T_0 finito $\Rightarrow$ **spettro DISCRETO** (righe equidistanti)

$T_0 \rightarrow \infty \Rightarrow$ **spettro CONTINUO** (trasformata)



Le righe sono equidistanti solo se l'evento è periodico globalmente. Se l'evento non è periodico globalmente, questa equidistanza è una proprietà della **RAPPRESENTAZIONE**, non del fenomeno.

2) DURATA REALE DEL FENOMENO (Δt)

MORFOLOGIA TEMPORALE: quanto dura davvero il fenomeno?

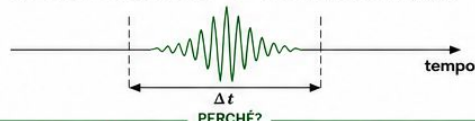
Determina la **LARGHEZZA** dello SPETTRO (banda).

$$B \propto \frac{1}{\Delta t}$$

(principio tempo-banda)

PIÙ LUNGO è il fenomeno $\Rightarrow$ PIÙ STRETTA è la banda.

PIÙ BREVE è il fenomeno $\Rightarrow$ PIÙ ESTESA è la banda.



EVENTO LUNGO

- $\rightarrow$ l'oscillazione ha più tempo per definirsi
- $\rightarrow$ la frequenza è più precisa
- $\rightarrow$ l'energia si concentra meglio
- $\Rightarrow$ **banda più stretta**

EVENTO BREVE

- $\rightarrow$ l'oscillazione dura poco
- $\rightarrow$ la frequenza è meno precisa
- $\rightarrow$ l'energia si distribuisce di più
- $\Rightarrow$ **banda più estesa**

Più tempo esiste realmente un fenomeno, più precisamente ne distingui la frequenza (banda più stretta). Più il fenomeno è breve, meno precisamente la frequenza è definita (banda più estesa).

3) TEMPO DI OSSERVAZIONE SCELTO DALL'ANALISTA (T)

EPISTEMOLOGIA DELL'ANALISI: quanto tempo osservo?

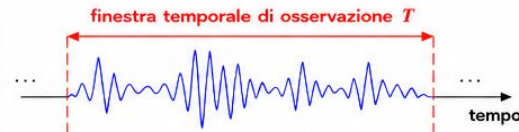
Determina la **RISOLUZIONE SPETTRALE** dell'analisi.

$$\delta f_{\text{res}} = \frac{1}{T}$$

(risoluzione di analisi)

T grande $\Rightarrow \delta f_{\text{res}}$ piccola $\Rightarrow$ migliori risoluzione (righe vicine)

T piccola $\Rightarrow \delta f_{\text{res}}$ grande $\Rightarrow$ peggiori risoluzione (righe distanti)



Attenzione: δf_{res} **NON** è una proprietà del segnale, ma della **RISOLUZIONE** dell'analisi (es. DFT/FFT).

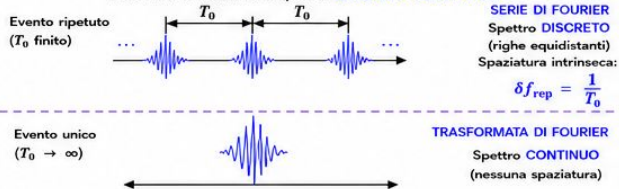
Durata reale del fenomeno (Δt) $\neq$ Tempo di osservazione (T)
Esiste nella realtà fisica. $\Rightarrow$ È una scelta dell'analista.

CONCETTO CHIAVE: DUE LIVELLI TEMPORALI DA DISTINGUERE

A. PERIODO GLOBALE DELL'EVENTO (T_0)

ONTOLOGIA DEL SEGNALE

Ogni quanto l'INTERO evento si ripresenta identico. Determina la natura dello spettro: **DISCRETO** o **CONTINUO**.



SERIE DI FOURIER
Spettro **DISCRETO**
(righe equidistanti)
Spaziatura intrinseca:
 $\delta f_{\text{rep}} = \frac{1}{T_0}$

TRASFORMATA DI FOURIER
Spettro **CONTINUO**
(nessuna spaziatura)

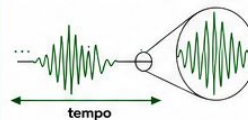
L'EVENTO NON È PERIODICO, MA LA SUA ANALISI SPETTRALE SI ORGANIZZA IN RIGHE PERIODICAMENTE DISTRIBUITE.

Le righe appartengono all'ANALISI, non al FENOMENO. Esse costituiscono la griglia con cui interroghiamo lo spettro.

B. STRUTTURE INTERNE E TRACCE SPETTRALI (f_i)

MORFOLOGIA DEL FENOMENO + LETTURA SPETTRALE

Oscillazioni, transitori e microstrutture interne all'evento. Determinano DOVE si concentra l'energia nello spettro.



Le strutture interne dell'evento (non necessariamente periodiche) lasciano tracce nello spettro sotto forma di:

- righe spettrali
- gruppi di righe
- zone di energia concentrate

Le frequenze caratteristiche delle tracce sono:
 $f_1, f_2, f_3, \dots$

Le frequenze f_i descrivono la struttura interna dell'evento.

Queste tracce permettono di analizzare l'evento, anche se non si ripete globalmente.



IN SINTESI

T_0 determina la **SPAZIATURA** dello spettro:
 $\delta f_{\text{rep}} = \frac{1}{T_0}$

Δt (durata reale) determina la **LARGHEZZA** della banda B :
 $B \propto \frac{1}{\Delta t}$

T (tempo di osservazione) determina la **RISOLUZIONE**:
 $\delta f_{\text{res}} = \frac{1}{T}$

T_0 = periodicità globale dell'evento (ontologia)
 Δt = durata reale del fenomeno (morfologia)
 T = tempo di osservazione scelto (analisi)

L'analisi spettrale usa una griglia di righe periodiche in frequenza per misurare DOVE e QUANTA energia si concentra nello spettro.

DUE SIGNIFICATI DIVERSI DI Δf IN TEORIA DI FOURIER

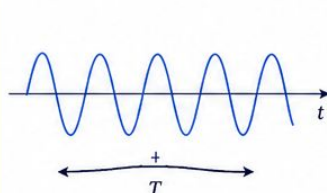
Stesso simbolo Δf , ma due significati completamente diversi.

1) Δf come SPAZIATURA TRA RIGHE (SERIE DI FOURIER)

Si riferisce alla **distanza** tra due frequenze discrete consecutive nello spettro di un segnale periodico.

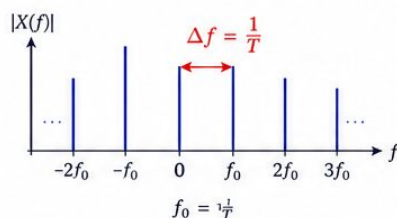
NEL TEMPO

segnale periodico con periodo T



IN FREQUENZA

spettro discreto (righe)



$$\Delta f = \frac{1}{T}$$

$\Delta f = \frac{1}{T}$ è la **distanza** (spaziatura) tra due righe spettrali consecutive.
Dipende dal **periodo** T .

COSA SUCCEDDE AL VARIARE DI T ?

Periodo T	$\Delta f = 1/T$ (spaziatura)	Spettro
T piccolo	Δf grande	righe distanti
T grande	Δf piccola	righe vicine
$T \rightarrow \infty$	$\Delta f \rightarrow 0$	righe si addensano

Nel limite $T \rightarrow \infty$
le righe si addensano
sempre di più: lo spettro
discreto tende a diventare
continuo.



IDEA CHIAVE

Nella serie di Fourier, Δf misura la **SPAZIATURA** tra le frequenze discrete.
È l'inverso del periodo: $\Delta f = \frac{1}{T}$.

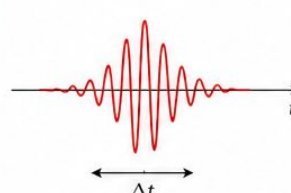
Caso: segnale periodico $\rightarrow$ **SERIE DI FOURIER** $\rightarrow$ **SPETTRO DISCRETO**

2) Δf come LARGHEZZA SPETTRALE (TRASFORMATA DI FOURIER)

Si riferisce all'**estensione dello spettro in frequenza** (**bandwidth**),
cioè alla **larghezza** dell'intervallo che contiene la maggior parte dell'energia.

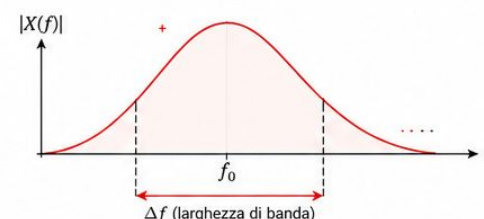
NEL TEMPO

segnale aperiodico (durata finita)



IN FREQUENZA

spettro continuo (involuppo)



Δf

Δf è la **LARGHEZZA DELLA BANDA** (**bandwidth**) dello spettro:
l'intervallo di frequenze che contiene la maggior parte dell'energia.
Dipende dalla **durata** Δt del segnale.

COSA SUCCEDDE AL VARIARE DI Δt ?

Durata Δt	Δf (larghezza)	Spettro
Δt piccola	Δf grande	spettro largo
Δt grande	Δf piccola	spettro stretto
$\Delta t \rightarrow \infty$	$\Delta f \rightarrow 0$	dipende dal segnale (non sempre collassa in una riga)

Nel limite $\Delta t \rightarrow \infty$:

- se il segnale tende a una sinusoide di durata infinita $\rightarrow$ lo spettro tende a una singola riga (delta di Dirac) in f_0 ;
- in generale, lo spettro può rimanere con larghezza non nulla (es. rumore stazionario).



IDEA CHIAVE

Nella trasformata di Fourier, Δf misura la **LARGHEZZA DELLO SPETTRO**.
È inversamente correlata alla durata: relazione tempo-frequenza
 $\Delta t \cdot \Delta f \geq C$ (principio di indeterminazione).

Caso: segnale aperiodico $\rightarrow$ **TRASFORMATA DI FOURIER** $\rightarrow$ **SPETTRO CONTINUO**

IN SINTESI

- Nella **SERIE DI FOURIER** (segnale periodico): $\Delta f = \frac{1}{T}$ è la spaziatura tra le righe.
- Nella **TRASFORMATA DI FOURIER** (segnale aperiodico): Δf è la larghezza spettrale (bandwidth).



Stesso simbolo Δf ,
due significati diversi: attenzione a non confonderli!

Il prodotto tra la durata temporale e la larghezza spettrale non può scendere sotto una certa costante

se vuoi un suono molto breve (Δt piccolo), devi avere uno spettro molto largo (Δf grande);
se vuoi uno spettro molto stretto (frequenza ben definita), il suono deve durare a lungo.

DUALITÀ TEMPO-FREQUENZA: più breve nel tempo $\rightarrow$ più largo in frequenza

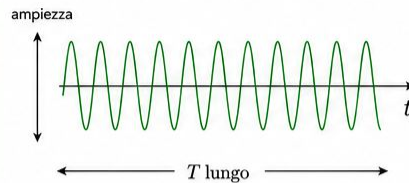
Nel tempo (segnale sonoro)

$\Rightarrow$

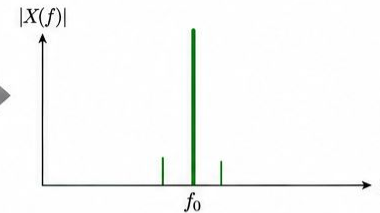
In frequenza (spettro di ampiezza)

1. Suono LUNGO nel tempo

es. nota di organo (sonoro sostenuto)



Se il suono è lungo e regolare, può essere descritto da una frequenza dominante (o poche frequenze vicine).

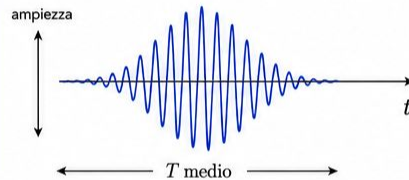


Spettro STRETTO: poche componenti spettrali concentrate attorno a f_0 .

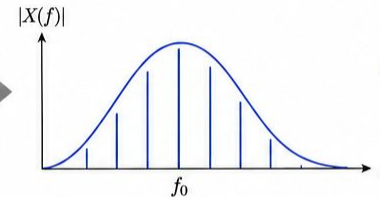
Δf piccolo

2. Suono MEDIO nel tempo

es. colpo di campana (sonoro di durata intermedia)



Durata intermedia: per ottenere inizio e fine servono più frequenze rispetto al caso lungo, ma non troppe.

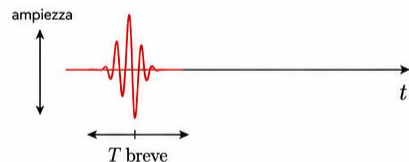


Spettro INTERMEDIO: più componenti spettrali sotto un inviluppo più ampio.

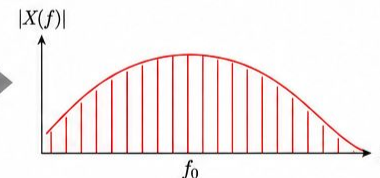
Δf medio

3. Suono BREVE nel tempo

es. battito di mani (sonoro molto breve)



Durata molto breve: per ottenere un evento così concentrato servono molte frequenze diverse.



Spettro LARGO: molte componenti spettrali distribuite su un intervallo molto ampio.

Δf grande

IN SINTESI

Quanto più un suono è breve nel tempo...



...tanto più il suo spettro deve allargarsi per descriverlo.



PRINCIPIO DI DUALITÀ TEMPO-FREQUENZA

La durata temporale Δt e la larghezza spettrale Δf sono inversamente correlate:

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \text{costante}$$

(analogo al principio di indeterminazione di Heisenberg)

- Δt è la durata caratteristica del suono (quanto è concentrato nel tempo).
- Δf è la larghezza caratteristica dello spettro (quanto è esteso in frequenza).
- Il prodotto non può essere arbitrariamente piccolo: non si possono avere insieme un suono molto breve e uno spettro molto stretto.



Una sinusoide perfetta ha frequenza precisa (spettro con una sola riga) ma esiste per sempre (tempo infinito).

Un impulso ideale (istantaneo) ha durata nulla ma ha uno spettro teoricamente illimitato (esteso su tutte le frequenze).

Nota: in pratica, nessun suono reale è infinito né istantaneo.

La relazione sopra descrive un principio generale, non un limite assoluto.

TRASFORMATA DI FOURIER E SERIE DI FOURIER: NON UN PASSAGGIO, MA UNA **SPECIALIZZAZIONE**

La serie di Fourier è la **trasformata di Fourier** di un segnale **PERIODICO**.

1 UN SEGNALE LIBERO (aperiodico)



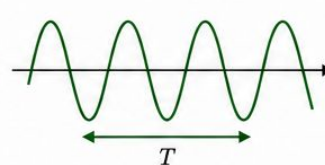
Un suono libero,
un battito, una parola...
non si ripete.

2 TUTTE LE FREQUENZE SONO PRESENTI



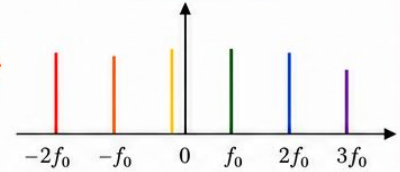
La **trasformata di Fourier**
descrive **TUTTE** le frequenze
possibili (spettro **continuo**).

3 IMPONIAMO LA PERIODICITÀ



Se il suono si ripete sempre
dopo un tempo T ...
non tutte le frequenze possono restare.

4 RESTANO SOLO LE ARMONICHE



La serie di Fourier descrive
SOLO le frequenze compatibili
con la periodicità: le armoniche
(multipli di $f_0 = \frac{1}{T}$).

L'IDEA INTUITIVA

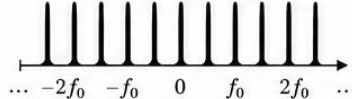


Spettro continuo = arcobaleno



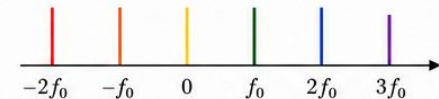
Tutti i colori sono presenti:
tutte le frequenze sono possibili.

Periodicità = pettine di frequenze



La periodicità impone una **GRIGLIA**
di frequenze compatibili (multipli di f_0).

Spettro discreto = armoniche



Restano solo alcune frequenze:
le **ARMONICHE**.



IN SINTESI

- La **trasformata di Fourier** descrive **TUTTE** le frequenze che possono comporre un segnale.
- La **serie di Fourier** descrive **SOLO** quelle compatibili con la **periodicità** del segnale.

MESSAGGIO CHIAVE

NON è un passaggio da continuo a discreto,
ma una **specializzazione**:
la serie di Fourier è un caso particolare
del caso generale (trasformata di Fourier).



PERIODICITÀ = VINCOLO CHE SELEZIONA.
LA TRASFORMATA DI FOURIER È IL QUADRO GENERALE.
LA SERIE DI FOURIER È IL CASO PERIODICO.



La **trasformata di Fourier**
è **TUTTA** la tavolozza
dei colori (frequenze).



La serie di Fourier
è il **pettine** che lascia
solo alcuni colori.

ESEMPIO INTUITIVO: ANALISI DI FOURIER DI UN COLPO SU UN TAM-TAM

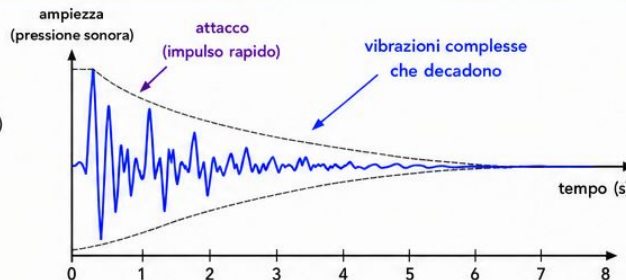
Il colpo su un tam-tam è un evento singolo e non periodico: usiamo la **TRASFORMATA (INTEGRALE) DI FOURIER**

1 IL COLPO: NEL TEMPO



Colpo singolo
(non periodico)

PAAANGG...

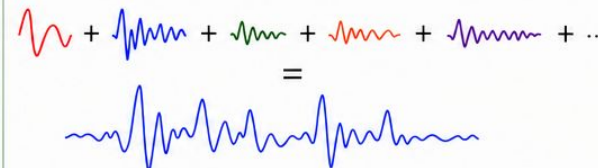


È una forma d'onda "libera": non si ripete, l'energia decresce nel tempo.

2 COSA FA FOURIER?

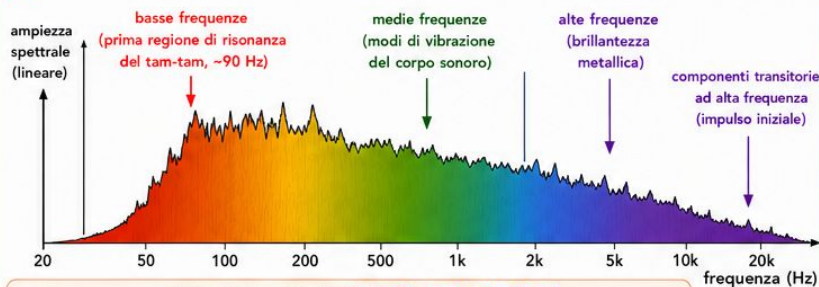
Scompone il suono in MOLTE componenti sinusoidali di frequenze diverse.

"DI QUALI FREQUENZE È FATTO QUESTO COLPO?"



Il suono è la **SOMMA** di **MOLTE** componenti sinusoidali con diverse frequenze e ampiezze.

3 NELLA FREQUENZA: LO SPETTRO (RISULTATO DELLA TRASFORMATA DI FOURIER)

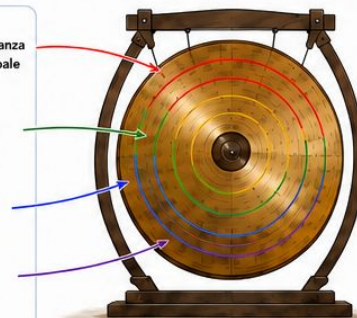


Lo spettro appare **DENSO** e **INARMONICO**:
molte componenti dense e inarmoniche.

L'energia è distribuita su **UN CONTINUUM** di frequenze (dal basso all'alto).

4 INTERPRETAZIONE INTUITIVA DELLE BANDE DI FREQUENZA

- ~ 90 Hz**
prima regione di risonanza (~90 Hz: modo principale di risonanza)
- 200 - 800 Hz**
modi di vibrazione principali del corpo del tam-tam
- 2 - 6 kHz**
brillantezza, attacco metallico
- > 6 kHz**
componenti transitorie ad alta frequenza dovute all'impatto iniziale



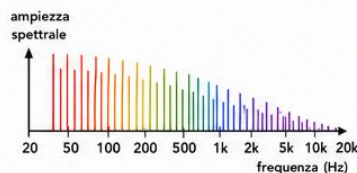
ESEMPIO CONCRETO

- Registrazione del colpo
- Durata totale: ~ 8 secondi
- Attacco: ~ 20 millisecondi
- Decadimento: lungo (alcuni secondi)

5 PERCHÉ È UN INTEGRALE?

Per descrivere il suono dobbiamo considerare **UN CONTINUUM** di frequenze possibili su tutto il dominio delle frequenze (praticamente limitato dalla registrazione).

Non solo poche frequenze discrete come $f_0, 2f_0, 3f_0, \dots$ ma **TUTTE** le frequenze possibili.



FORMULA (solo per completezza)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

L'integrale (somma) idealmente accumula il contributo di **OGNI** frequenza f presente nell'evento sonoro.

CONFRONTO FINALE

TAM-TAM (evento singolo)
Spettro denso e inarmonico (non armonico)
Nuvola di frequenze



NOTA STABILE (es. Do pianoforte)
Spettro discreto (armonico)
Solo alcune righe (armoniche)



La **TRASFORMATA di Fourier** è particolarmente utile per eventi **NON PERIODICI**.

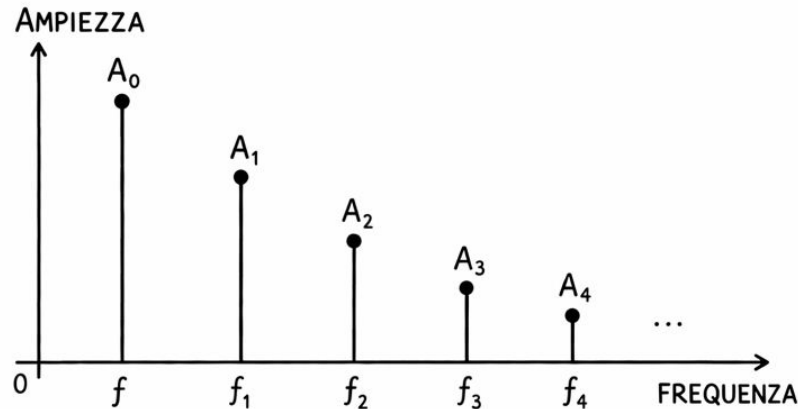


La **SERIE di Fourier** descrive suoni **PERIODICI** e ripetitivi (note stabili, segnali ciclici).

SPETTRO ARMONICO A RIGHE DISCRETE (SERIE DI FOURIER)

Suono periodico ideale

- composto da sinusoidi con frequenze multiple intere della fondamentale
- lo spettro è discreto: l'energia è concentrata solo su alcune frequenze

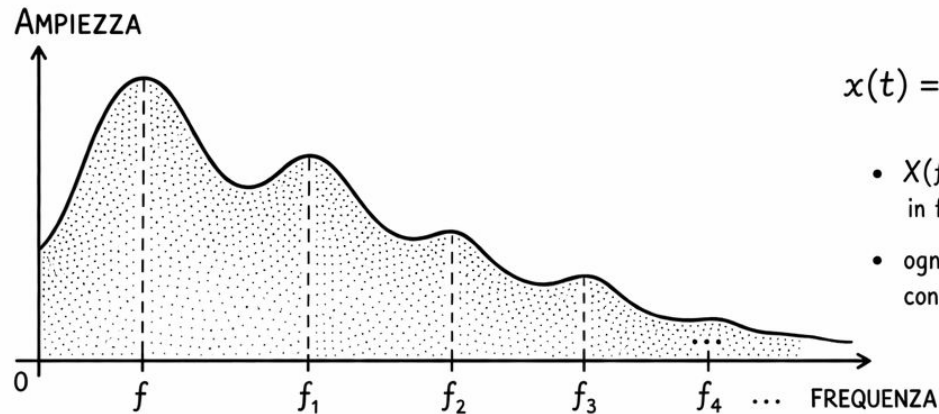


- f = fondamentale
- $f_1 = 2f$
- $f_2 = 3f$
- $f_3 = 4f$
- $f_4 = 5f$
- ... = armoniche superiori

LO STESSO SPETTRO IN FORMA CONTINUA (INTEGRALE DI FOURIER)

Suono reale (durata finita, complesso)

- richiede un numero infinito di sinusoidi con tutte le frequenze possibili
- lo spettro è continuo: l'energia è distribuita su un intervallo di frequenze

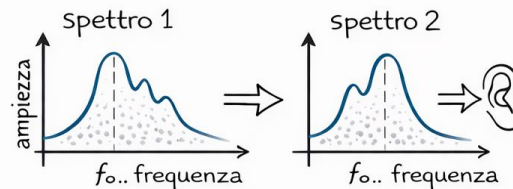


$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

- $X(f)$ = ampiezza (complessa) in funzione della frequenza f
- ogni frequenza contribuisce con una sinusoide infinitesima

Rumore e percezione del suono

- I suoni come *s*, *sc* (“sciare”) o un getto d’aria non sono periodici
→ sono **rumori**
- Possono essere descritti come:
 - somma di molte sinusoidi
 - con frequenze vicine tra loro
 - distribuite in una banda continua
- Anche se i dettagli cambiano:
 - la distribuzione energetica nelle frequenze resta simile
→ noi percepiamo lo stesso **suono**



Idea chiave: Non percepiamo le singole componenti,
ma la **forma globale** dello spettro.

Se prendiamo in considerazione i “rumori”, ad es., il sibilo prodotto da un getto d’aria o i suoni sibilanti *s* o *sc* (in “sciare”), tali suoni possono essere rappresentati come la somma di onde sinusoidali con frequenze leggermente differenti.

Se si pronuncia due volte *sc*, la forma d’onda non sarà perfettamente uguale. L’intensità del suono in una gamma di frequenza non ampia sarà approssimativamente uguale, ma le ampiezze e le fasi delle singole componenti di frequenza non saranno identiche. Nonostante ciò i due *sc* suoneranno proprio nello stesso modo; noi li percepiremo come uguali.

TRASFORMATA DI FOURIER E TRASFORMATA INVERSA

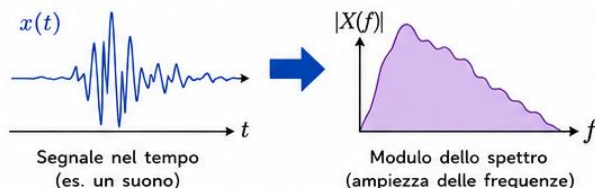
Per funzioni non periodiche (periodo $\rightarrow \infty$)

TRASFORMATA DI FOURIER (analisi)

Da TEMPO a FREQUENZE

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i 2 \pi f t} dt$$

Prende un segnale nel tempo $x(t)$
e lo scompone nelle sue componenti in frequenza.



Mostriamo il **modulo** $|X(f)|$: è lo **spettro di ampiezza**.
Lo spettro completo include anche la fase.

DUE OPERAZIONI
COMPLEMENTARI



ANALISI
(scomporre)

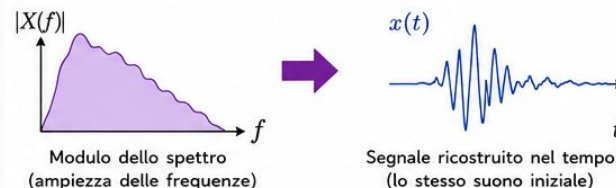
↕
SINTESI
(ricomporre)

TRASFORMATA INVERSA DI FOURIER (sintesi)

Da FREQUENZE a TEMPO

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i 2 \pi f t} df$$

Prende lo spettro di frequenza $X(f)$
e lo **ricostruisce** nel tempo $x(t)$.



Mostriamo il **modulo** $|X(f)|$: è lo **spettro di ampiezza**.
Lo spettro completo include anche la fase.

METAFORA MUSICALE: UN ACCORDO AL PIANOFORTE

TRASFORMATA DI FOURIER (analisi) = separare le note



Accordo suonato
(suono complesso nel tempo)

Cosa contiene l'accordo?



Lo spettro ti dice
quali note (frequenze)
sono presenti e con
quanta intensità.

TRASFORMATA INVERSA DI FOURIER (sintesi) = ricostruire il suono

Le componenti (note)



Accordo ricostruito
(stesso suono di partenza)

Le note insieme
ricreano lo stesso
accordo (suono)
nel tempo.

La trasformata non cambia il suono: cambia il punto di vista.



IN SINTESI

Trasformata di Fourier (analisi)

- Parte dal tempo (suono).
- Scopre le frequenze presenti.
- Risultato: spettro $X(f)$ (ampiezza e fase).

DUE FACCE DELLA STESSA MEDAGLIA

La prima scompone,
la seconda ricompone.



Trasformata inversa (sintesi)

- Parte dallo spettro $X(f)$.
- Ricostruisce il suono nel tempo.
- Risultato: segnale $x(t)$.



IDEA CHIAVE

Il suono può essere analizzato
nelle sue frequenze e poi
ricostruito senza perdere nulla.

In definitiva cos'è e cosa fa l'integrale di Fourier?

- 1) L'integrale di Fourier → un metodo per analizzare un segnale e scomporlo nelle oscillazioni elementari che lo costituiscono.
- 2) Attraverso l'integrale → si calcola quanta intensità vi è in ciascuna frequenza del segnale.
- 3) L'integrale → permette di ottenere lo spettro del segnale, cioè la distribuzione di tutte le frequenze che lo compongono. Lo spettro è continuo perché le frequenze presenti in un segnale possono occupare un insieme continuo di valori, senza essere limitate a pochi valori isolati.
- 5) L'integrale considera → il segnale nel suo insieme per questo mostra quali frequenze sono presenti, ma non quando compaiono nel tempo. Questo significa che *l'evoluzione temporale del suono non viene descritta*: lo spettro è una fotografia globale, non un racconto del suo sviluppo.
- 6) Anche il rumore appare nello spettro come una presenza diffusa e disordinata di frequenze, spesso distribuite in modo continuo. L'integrale di Fourier serve a capire da quali frequenze è formato un segnale e a distinguere il segnale dal rumore, ma non dice come queste frequenze cambiano nel tempo.

Limite del modello di Fourier

I suoni reali $\neq$ eterni: iniziano, cambiano nel tempo e finiscono. Un colpo di pianoforte, una consonante della voce, il rintocco di una campana hanno tutti un attacco, uno sviluppo e una fine (*involuppo temporale* o envelope).

Il modello di Fourier, però, descrive i suoni scomponendoli in sinusoidi pure: onde perfettamente regolari che, idealmente, esistono da sempre e per sempre.

Punto cruciale: un suono reale, essendo limitato nel tempo, non può essere ridotto a una sola frequenza. Per costruirlo servono più frequenze che, combinandosi, ne rendono possibile la localizzazione nel tempo (inizio, durata e fine).

- Per questo la trasformata di Fourier implica una regola fondamentale: più un suono è breve nel tempo, più il suo spettro deve allargarsi. Un suono lungo e stabile richiede poche componenti dominanti; un suono breve e impulsivo ne richiede molte, distribuite su una banda più ampia.

Nota bene.

Il timbro dipende dalla combinazione delle componenti sinusoidali, cioè da come l'energia è distribuita tra le frequenze: nella serie di Fourier come armoniche discrete, nella trasformata di Fourier come spettro continuo.

Il modello di Fourier $\rightarrow$ potente per analizzare la struttura spettrale dei suoni, ma *descrive molto meno bene* la loro dinamica temporale, come l'attacco, l'evoluzione e i transitori.

Dal segnale al segno: *sinusoidi tra scienza e arte*

Torniamo alla distinzione di **Giovanni Piana** tra segnale e segno.

- Le sinusoidi sono dette segnali acustici perché descrivono un fenomeno fisico in quanto variazioni di pressione nel tempo, misurabili e controllabili.
- Ma le stesse sinusoidi possono diventare anche segni: elementi usati intenzionalmente per costruire significato ed espressione artistica.

La teoria di Fourier, nata come strumento scientifico, suggerisce così anche una tecnica compositiva. Esempio storico fondamentale:

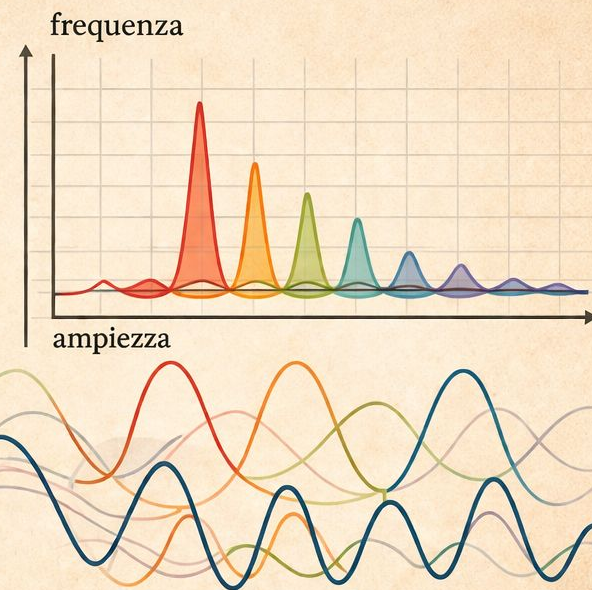
Studio II (1954) di **Karlheinz Stockhausen** (1928-2007) → una composizione costruita esclusivamente a partire da sinusoidi pure, organizzate secondo criteri rigorosi ma con finalità artistiche, presso lo Studio *für elektronische Musik* della radio di Colonia, Germania.

→ Composizione realizzata integralmente in studio, senza strumenti tradizionali: solo generatori di suoni, filtri e nastro magnetico.

→ Utilizza solo sinusoidi pure come costituenti base per costruire dei suoni calcolati e organizzati con precisione matematica.

→ Tutto è stato generato in laboratorio, frequenza, durata, intensità: *comporre il suono anziché con i suoni*.

La sinusoide, segnale (fisico) e segno (espressivo), diviene così un ponte tra laboratorio e musica.



Come i pitagorici e i platonici rinascimentali pensavano l'universo come un'armonia di sfere in risonanza, così la scienza moderna interpreta il suono come una sintesi di componenti armoniche.

